

Российская академия наук
Вычислительный центр

И.С.Меньшиков¹, Д.А.Шелагин²

Рыночные риски: модели и методы

¹ FAST – Центр, Академия народного хозяйства при Правительстве РФ. Email: menshikov@ane.ru

² Сберегательный Банк РФ. Email: dwhome@sbrf.ru

УДК 519.86

Ответственный редактор
академик А.А. Петров

Целью работы являлось исследование применимости различных моделей вычисления оценок риска Value-at-Risk на нестабильных финансовых рынках. Рассмотрены следующие широко распространенные модели: нормальная модель и модель экстремальных значений. Для реализации нормальной модели применялись: метод постоянных ковариаций, метод экспоненциально взвешенных ковариаций, GARCH-модели, а также была предложена модель, использующая непараметрические методы вейвлет-анализа. Для исследования свойств моделей разработан набор тестов, характеризующих их по различным критериям, главными из которых являются 1) точность – соответствие модели определению VaR и 2) эффективность – соотношение VaR и реальных прибылей/убытков, что особенно важно для распределения рискового капитала. Приводятся результаты тестирования моделей на различных рынках и выводы о степени их применимости.

Рецензенты: А.А. Шананин,
М.Г. Клепикова

Научное издание

© Вычислительный центр РАН, 2000 г. Св. план 2000, поз.11

Введение

Мера риска Value-at-Risk (VaR) на данный момент является стандартом в измерении рыночных рисков, и для ее вычисления разработано множество моделей и методов их реализации. Основной целью данной работы является исследование применимости различных моделей вычисления VaR к нестабильным финансовым рынкам, в том числе российским.

В разд. 1 приведена классификация моделей, используемых для вычисления VaR, а также дан обзор наиболее распространенных из них:

- модели вариаций-ковариаций:
 - метод постоянных ковариаций,
 - метод экспоненциально-взвешенных ковариаций (Risk Metrics),
 - GARCH-модели,
 - полупараметрические модели;
- непараметрические модели (историческое моделирование);
- модели, использующие теорию экстремальных значений.

Модели приводятся в порядке ослабления ограничений, накладываемых на характер анализируемых временных рядов. Для каждой модели приведены предположения, на которых основывается данная модель, ее область применения, преимущества и недостатки. Предложена полупараметрическая модель, использующая методы вейвлет-анализа для моделирования волатильности. Теоретически эта модель имеет наиболее широкую область применения: нестационарные временные ряды с негауссовским, и, возможно, коррелированным шумом.

Исследование применимости рассматриваемых моделей VaR к различным финансовым рынкам состоит из двух частей: теоретическое (*ex-ante*) и экспериментальное (*ex-post*).

Теоретическое исследование состоит в анализе статистических характеристик временных рядов разных рынков и в сопоставлении полученных результатов с предположениями исследуемых моделей VaR. На основе этого можно сформулировать утверждения о принципиальной применимости модели к данному рынку. В разд. 2 дан обзор соответствующих статистических тестов и приведены результаты для различных рынков.

Экспериментальное исследование заключается в тестировании моделей на основе исторических данных (также в литературе по рискам такое тестирование называется прогонкой – *backtesting*). Для *ex-post* исследования применимости моделей существуют стандартные статистические тесты, характеризующие соответствие модели VaR его статистическому определению. Однако для их вычисления обычно требуются достаточно большие выборки, каковые отсутствуют на развивающихся рынках. К тому же, большинство статистик не имеют интерпретации в экономическом смысле. Поэтому в разд. 3

развивается подход авторов [1], характеризующий модели VaR по нескольким различным критериям. Критерии при этом разделены на две группы: 1) точность – соответствие модели статистическому определению VaR и 2) эффективность – различные соотношения VaR и реальных прибылей/убытков, имеющие прямой экономический смысл. Далее, из критериев эффективности выбраны наиболее важные с экономической точки зрения критерии, и по ним проведен многокритериальный анализ моделей.

Исследуемые модели тестировались на реальных данных рынка FOREX и рынка акций, в том числе и российского рынка. Целью тестирования являлась проверка априорных выводов об области применимости той или иной модели, а также сравнение точности и эффективности исследуемых моделей по различным критериям.

Результаты тестов показывают, что практически для любого критерия оценки не существует модели, превосходящей остальные на всех рынках. Таким образом, при выборе модели VaR для практического применения необходимо учитывать как специфику рынка, так и требования, предъявляемые к характеристикам самой модели. Многокритериальный анализ эффективности моделей показывает, что существует группа моделей, являющихся парето-оптимальными на всех рассмотренных рынках. Так, в частности, к ним относится предложенная модель, использующая вейвлет-анализ.

1. Меры риска Value-at-Risk

Из всех видов рисков, с которыми сталкиваются финансовые организации, рыночный риск (*market risk*), возникающий из-за изменения рыночных цен, наиболее легко может быть измерен с использованием методологии Value-at-Risk (VaR). Для других видов рисков (кредитного, операционного) методология VaR также может использоваться, но ее применимость ограничена.

Будем использовать следующие обозначения:

$P(t)$ – текущая стоимость портфеля (*mark-to-market value*), состоящего из различных финансовых инструментов: $P(t) = \sum_i n_i p_i(t)$, где $p_i(t)$ – текущая

рыночная стоимость i -го инструмента, а n_i – его количество. Инструменты делятся на два типа: простые инструменты и производные (*derivative*), цена которых связана с ценой соответствующего простого инструмента – базового актива, причем эта зависимость может быть как линейной, так и нелинейной (см. табл.1). Цены производных инструментов могут быть найдены, исходя из цен базовых активов, с помощью соответствующих моделей ценообразования этих инструментов (см., например, [2]).

Таблица 1. Типы финансовых инструментов

Тип инструмента	Инструмент	Базовый актив
Простые	Облигация	
	Акция	
	Иностранная валюта	
Линейные производные	Своп процентных ставок	
	Облигация с плавающим купоном	Ставка на денежном рынке
	Валютный форвард	Валютный курс (FX rate)
	Соглашение о будущей процентной ставке	Ставка на денежном рынке
	Валютный своп	Цена свопа, валютные курсы
Нелинейные производные	Опцион на акцию	Цена акции
	Опцион на облигацию	Цена облигации
	FX опцион	Валютный курс

Риском будем называть неопределенность стоимости портфеля в будущий момент $t + \Delta t$, связанную с неопределенностью цен инструментов, входящих в состав портфеля. Сами же цены инструментов (ставки, курсы,

индексы акций и т.д.), от которых зависит стоимость портфеля, будем называть факторами риска. Так как цены производных инструментов можно выразить через цены простых, то и стоимость портфеля в целом выражается через них, для чего будем использовать следующую запись: $P(x, t)$, где через x обозначен вектор цен простых инструментов. Компоненты вектора x в дальнейшем также будем называть переменными состояния.

В качестве переменных состояния вместо цен, как правило, будем использовать простые доходности:

$$r_{i,t} := \frac{p_{i,t+1} - p_{i,t}}{p_{i,t}},$$

где p_i – цена i -го инструмента в момент времени t .

Через r_t будем в дальнейшем обозначать вектор $r_t = (r_{1,t}, \dots, r_{n,t})$ доходностей всех n инструментов в момент времени t . Наряду с простыми доходностями можно использовать также и логарифмические доходности: $r_{i,t} = \ln(p_{i,t+1}/p_{i,t})$, что приблизительно равно простым доходностям с точностью до членов второго порядка.

Теперь дадим определение меры риска VaR.

Для заданного уровня достоверности $\alpha \in (0; 1)$ и временного горизонта Δt мера риска VaR определяется как

$$VaR_\alpha := \inf \{u \mid \mathbf{P}[\Delta P(\Delta x, \Delta t) \leq u] > \alpha\}, \quad (1)$$

где ΔP – изменение стоимости портфеля, Δx – изменения переменных состояния за период времени Δt .

В случае непрерывного распределения нижняя грань достигается и, следовательно,

$$VaR_\alpha := \{u \mid \mathbf{P}[\Delta P(\Delta x, \Delta t) \leq u] = \alpha\}.$$

Это означает, что VaR есть наибольший убыток, который может произойти на протяжении периода времени Δt с вероятностью α . Считается, что за период времени Δt состав портфеля не изменяется.

С точки зрения статистики определение (1) означает следующее. Пусть $F_{\Delta P}$ – функция распределения случайной величины $\Delta P(\Delta x, \Delta t)$. Тогда VaR_α представляет собой не что иное, как α -квантиль функции распределения F :

$$VaR_\alpha = F_{\Delta P}^{-1}(p), \quad p = 1 - \alpha.$$

Таким образом, нашей основной задачей будет нахождение искомой функции распределения $\Delta P(\Delta x, \Delta t)$. Методы, используемые для ее нахождения, можно классифицировать по предположениям относительно вероятностного

распределения факторов риска, а также о виде функциональной зависимости изменений стоимости портфеля от изменений факторов риска.

На рис.1 приведена классификация различных моделей, используемых для вычисления VaR. Согласно ему модели можно классифицировать следующим образом:

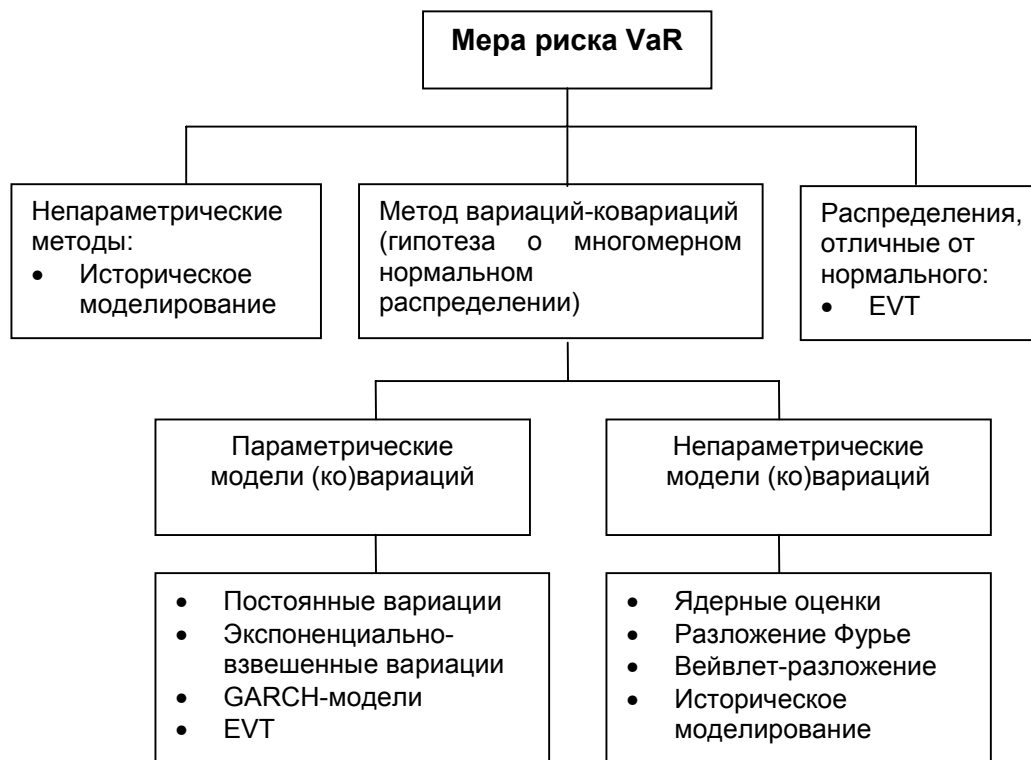


Рис.1. Классификация моделей VaR

- 1) Не делается никаких предположений о принадлежности какому-либо семейству распределений, а используется эмпирическая функция распределения. Примером такого метода является историческое моделирование (*historical simulation*).
- 2) Предположение о многомерном нормальном распределении – метод вариаций-ковариаций. Для оценки параметров распределения – ковариационной матрицы – используются различные методы как параметрические, так и непараметрические. Подробнее об этом изложено ниже.
- 3) Предположения о характере распределения, отличном от нормального. Например, это может быть какое-либо из распределений, подходящих для описания тяжелых «хвостов» распределений. В этом случае используются, например, методы теории экстремальных значений.

Для получения функции распределения всего портфеля теперь нужны предположения о виде функциональной зависимости изменений стоимости портфеля от изменений факторов риска. В зависимости от этих предположений функция распределения изменений стоимости портфеля получается либо в аналитическом виде, либо как эмпирическая функция распределения (в методе Монте-Карло).

- 1) Полная оценка стоимости (*full valuation*) инструмента используется в моделях, где генерируются сценарии, таких, как историческое моделирование или метод Монте-Карло. При этом стоимость каждого инструмента для каждого сценария вычисляется с использованием какой-либо модели его ценообразования, например для опциона – модель Блэка-Шоулза [2].
- 2) Используется аппроксимация изменений стоимости, например линейная или квадратичная аппроксимация изменения цены инструмента от изменений факторов риска. Такого рода предположения чаще всего используются в методе вариаций-ковариаций для получения оценки в аналитическом виде. Так, в случае линейной аппроксимации в методе вариаций-ковариаций распределение изменений стоимости портфеля также будет нормальным, а в случае квадратичной аппроксимации – уже нет.

В данной работе основное внимание уделено методу вариаций-ковариаций по следующим причинам:

1. Относительная простота и небольшая вычислительная стоимость.
2. Возможность получения оценки VaR в аналитическом виде. Это свойство можно использовать для декомпозиции суммарной оценки VaR по вкладам отдельных составляющих портфеля, что крайне важно в задачах оптимизации и управления риском.

1.1. Метод вариаций-ковариаций

При использовании вариационно-ковариационного метода мы находимся в рамках предположения о многомерном нормальном распределении факторов риска: доходности r_t распределены независимо и по нормальному закону со средним, равным μ , и ковариационной матрицей Σ_t . Далее, как правило, будем считать, что среднее равно нулю.

Таким образом, модели будут различаться лишь методами оценки параметров данного распределения (матрицы ковариаций Σ) и видом функции изменения стоимости портфеля. Методы оценки параметров распределения будут базироваться на различных предположениях о характере стохастических процессов от самых простых – предположений о стационарности процессов,

нормальности распределения и независимости шума – до более сложных методов, свободных от некоторых из этих допущений.

1.1.1. Ковариационная матрица с равными весами

В этом самом простейшем подходе предполагается, что ковариации доходностей являются постоянными на протяжении периода длины T – скользящего окна наблюдений, а также на протяжении периода прогноза Δt . Таким образом, ковариационная матрица вычисляется как

$$\hat{\Sigma}_{t+1} = \frac{1}{T-1} \sum_{s=0}^{T-1} r_{t-s} r_{t-s}^T. \quad (2)$$

Если ковариации постоянны на протяжении периода оценивания, то для получения несмещенной и эффективной оценки матрицы Σ используются все наблюдения из временных рядов с равными весами.

Исследования показывают, что реальные временные ряды являются нестационарными, и, значит, ковариации изменяются со временем. Для учета этого факта требуются другие методы оценки, о которых и пойдет речь ниже.

1.1.2. Экспоненциально-взвешенные ковариации

Данный метод используется в методологии J.P. Morgan RiskMetrics™ [3–5]. Его специфика состоит в большем вкладе в ковариацию более поздних наблюдений. В этой модели зависящая от времени экспоненциально-взвешенная ковариационная матрица Σ_t вычисляется следующим образом:

$$\hat{\Sigma}_{t+1} = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^T} \sum_{s=0}^{T-1} \lambda^s r_{t-s} r_{t-s}^T, \quad \text{где } 0 < \lambda < 1. \quad (3)$$

Последнее выражение может быть преобразовано следующим образом:

$$\hat{\Sigma}_{t+1} = \lambda \hat{\Sigma}_t + (1-\lambda) r_t r_t^T, \quad (4)$$

что представляет собой взвешенное среднее авторегрессии и скользящего среднего первого порядка, что позволяет отслеживать кластеры волатильности. Чем меньше значение множителя λ , тем чувствительнее модель к изменениям, происходящим с временным рядом. С другой стороны, уменьшение значения λ ведет к уменьшению эффективного размера выборки, что влияет на точность оценки ковариаций.

В принципе, для каждого временного ряда можно найти оптимальное значение λ , при котором его вариация (в финансовой литературе также называемая волатильностью - *volatility*) наилучшим образом описывается

авторегрессионным процессом (4). Это можно сделать, например, с помощью метода максимизации функции правдоподобия, как описано ниже.

Пусть имеется выборка $(r_1, \dots, r_T)$, соответствующая ряду доходностей n имеющихся инструментов. Тогда функция совместной плотности распределения имеет вид

$$f(r_t | \lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma_t(\lambda)|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} r_t^T \Sigma_t(\lambda)^{-1} r_t\right),$$

где $\Sigma_t(\lambda)$ - ковариационная матрица в момент t , вычисленная для значения λ .

Функция правдоподобия в общем случае имеет вид

$$L = \prod_{t=1}^T f(r_t | \lambda).$$

Оптимальное значение параметра λ находится из решения следующей задачи оптимизации:

$$\max_{0 < \lambda < 1} L(\lambda),$$

которую можно решать с помощью численных методов оптимизации.

Для удобства решения задачи оптимизации вместо самой функции правдоподобия используется ее логарифм

$$\ln L = \sum_{t=1}^T \ln(f(r_t | \lambda)) = - \sum_{t=1}^T \left\{ \ln(|\Sigma_t(\lambda)|) + r_t^T \Sigma_t(\lambda)^{-1} r_t \right\},$$

и таким образом задача нахождения оптимального параметра принимает вид

$$\lambda = \arg \min_{0 < \lambda < 1} \sum_{t=1}^T \left\{ \ln(|\Sigma_t(\lambda)|) + r_t^T \Sigma_t(\lambda)^{-1} r_t \right\}.$$

1.1.3. GARCH – модели

Обобщением экспоненциально-взвешенной модели является модель обобщенной авторегрессионной условной гетероскедастичности (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity – GARCH) [4, 6, 7]. Данные модели, как и (4), сочетают авторегрессию и скользящее среднее, только более высоких порядков. Так, одномерная модель GARCH(p,q) имеет вид

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \beta_i \sigma_{t-i}^2. \quad (5)$$

Параметры α , β находятся, например, с помощью метода максимального правдоподобия. Простейшая и наиболее часто используемая модель GARCH(1,1) имеет вид

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha r_t^2 + \beta \sigma_t^2. \quad (6)$$

Заметим, что при $\omega=0$, $\alpha=1-\lambda$, $\beta=\lambda$ эта модель соответствует экспоненциально-взвешенной модели (4).

При увеличении числа параметров применение GARCH-моделей становится затруднительным по причине возникающих трудностей при численном решении оптимизационной задачи – максимизации функции правдоподобия. Так, в многомерной GARCH(1,1) считается, что каждый элемент ковариационной матрицы имеет вид

$$\sigma_{ij,t+1} = f(r_{i,t}, r_{j,t}, \sigma_{ij,t})$$

В этом случае число параметров модели становится слишком велико (так, например, для 9 факторов риска (т.е. ковариационной матрицы 9×9) число параметров равно 243, а для крупных международных банков число факторов риска составляет тысячи), поэтому используются различные модификации модели, налагающие на нее дополнительные ограничения [1].

GARCH с постоянными корреляциями. В этой модели принимается предположение, что внедиагональные элементы ковариационной матрицы имеют вид $\sigma_{ij,t+1} = \rho_{ij} \sigma_{i,t} \sigma_{j,t}$, где коэффициент корреляции ρ_{ij} не зависит от времени. Диагональные же элементы $\sigma_{i,t}$ моделируются, например, посредством одномерной GARCH(1,1) модели, как описано выше.

Ортогональный GARCH. Данные модели используют факторный анализ, в котором через небольшое число параметров выражается большая часть структуры ковариационной матрицы. При этом существенно уменьшается число оцениваемых параметров.

Первым шагом является ортогонализация факторов риска, где в качестве ортогональных факторов риска выступают главные компоненты. Обозначим матрицей R все множество исторических доходностей – матрица размером $T \times k$. Пусть W – матрица собственных векторов матрицы $R^T R$ ($k \times k$). Тогда ортогональные главные компоненты представляются как

$$P = (P_1, \dots, P_k) = RW.$$

Разрешая уравнение относительно R и имея в виду, что $W^{-1} = W^T$, получаем, что изменение факторов риска можно представить линейной комбинацией главных компонент, т.е.

$$R = PW^T.$$

Соответственно оценка ковариационной матрицы будет

$$\hat{\Sigma}_t = W \text{var}(P)W^T, \quad (7)$$

где $\text{var}(P)$ – диагональная матрица вариаций главных компонент.

Необходимо найти только собственные векторы $R^T R$ и диагональные элементы $\text{var}(P)$, которые можно находить с использованием обычных одномерных GARCH моделей.

1.2. Непараметрические модели

Под непараметрическими моделями будем понимать те модели, в которых оцениваемые функции (например, функция распределения) не определяются конечным числом параметров. Так, вариационно-ковариационный метод является параметрическим, поскольку используется модель, в которой считается, что распределение является нормальным, и параметрами этой модели являются элементы ковариационной матрицы. Далее, модели, используемые для оценки этих параметров, также могут быть как параметрическими, так и непараметрическими. Все перечисленные выше модели оценки ковариационной матрицы имеют конечное число параметров, следовательно, являются параметрическими.

В данном разделе рассматриваются: непараметрический метод оценки функции распределения – историческое моделирование, а также непараметрические методы оценки ковариационной матрицы или волатильностей. В литературе такие методы, где для оценки параметров какой-либо параметрической модели используются непараметрические модели, называются полупараметрическими.

1.2.1. Историческое моделирование

В историческом моделировании для моделирования изменений переменных состояния используются исторические данные, т.е. с точки зрения статистики строится эмпирическая функция распределения.

Эмпирическая функция распределения строится следующим образом.

Пусть X – случайная переменная, имеющая неизвестную функцию распределения $F(x)$, $(X_1, \dots, X_T)$ – выборка этой случайной переменной. С использованием обозначения

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

эмпирическая (выборочная) функция распределения определяется следующим образом:

$$F_T(x) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \theta(x - X_i). \quad (8)$$

Эмпирическая функция распределения имеет ступенчатый вид, что создает трудности при определении значений квантилей. Для устранения этого недостатка производится сглаживание. Сглаживание можно осуществить, например, путем свертки $F_T(x)$ с некоторым ядром V (см., например, [7]):

$$f_T(x) = \frac{1}{Th_T} \sum_{i=1}^T V\left(\frac{x - X_i}{h_T}\right), \quad (9)$$

где $f_T(x)$ – функция плотности распределения, а ядро $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} V(x) dx = 1,$$

и последовательность $\{h_T\}$ такова, что

$$h_T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0, \quad Th_T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \infty.$$

В качестве функции ядра V часто используются гауссиан: $V(x) = e^{-x^2/2}$. В работе [7] показано, что при определенных ограничениях, накладываемых на $f(x)$, последовательность $\{f_T(x)\}$ сходится к $f(x)$.

Теперь для получения значения VaR построим эмпирическую функцию распределения, используя T последних доходностей из исторического ряда (BIS – Bank of International Settlements рекомендует использовать по меньшей мере 250), после чего по ней легко находится α -квантиль, который и является значением VaR.

В качестве выборки, по которой строится эмпирическая функция распределения, может использоваться любой отрезок исторического ряда, в частности, соответствующий какому-либо событию, сильно повлиявшему на поведение данного ряда. Результаты такого рода моделирования называются стресс-тестированием (*stress testing*) и используются на практике совместно с другими оценками VaR.

Недостатком исторического моделирования являются трудности при вычислении вероятностей экстремальных (маловероятных) событий, так как для этого требуются большие выборки.

1.2.2. Непараметрическое моделирование волатильности

Для получения непараметрических оценок волатильности традиционно используются два класса методов: методы ядерной оценки (*kernel estimation*), использующие свертку с некоторым ядром, и методы, использующие разложение в функциональный ряд (например, ряд Фурье) [1, 7].

Методы ядерной оценки используют для оценки волатильности взвешенную сумму

$$\hat{\sigma}_t^2 = \sum_{i=1}^T w_i r_{t-i}^2, \text{ где } \sum w_i = 1. \quad (10)$$

Существует множество схем для выбора весовых коэффициентов, и опять наиболее популярной из них является использование гауссовского ядра. Обозначим $z_j := (r_{j-1}, r_{j-2}, \dots, r_{j-m})$. Тогда в качестве весов w_i используются

$$w_i = \frac{K(z_t - z_{t-i})}{\sum_{j=1}^T K(z_t - z_{t-j})}, \quad (11)$$

где

$$K(z_t - z_{t-j}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|H|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(z_t - z_{t-j})^T H(z_t - z_{t-j})\right\},$$

$$H = \text{diag}(h_1, \dots, h_m).$$

Подробное изложение данного метода дано в работе [7].

Другим подходом к непараметрической оценке является разложение исходного ряда $\{r_{i,t}\}_{t=1}^T$ в функциональный ряд, например в ряд Фурье. Оценка волатильности при этом выражается через значения коэффициентов разложения. Так, например, при разложении в ряд Фурье оценка волатильности имеет вид

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} |A(2\pi k / T)|^2, \quad (12)$$

где $A(\omega) = \sum_{t=0}^{T-1} r_t e^{-i\omega t}$ - коэффициент преобразования Фурье ряда $\{r_{i,t}\}_{t=1}^T$.

Равенство (12) означает, что вариация декомпозируется по частотам, а выражение $|A(2\pi k / T)|^2$ представляет вклад в вариацию отдельных гармоник.

Теперь приведем обоснование этого метода. Известно, что набор $|A(\omega)|^2$, называемый спектром, представляет собой не что иное, как фурье-преобразование автоковариационной функции. Покажем это для простоты для непрерывного случая, где вместо дискретного ряда $\{r_t\}_{t=1}^T$ рассмотрим функцию

$$r(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{r}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \text{ где } \tilde{r}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} r(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Автоковариационная функция имеет вид

$$c(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t) r(t - \tau) dt,$$

и ее преобразование Фурье соответственно будет

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} c(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r(t) r(t - \tau) e^{i\omega(t - \tau)} e^{-i\omega t} dt d(t - \tau) = \\ &= \tilde{r}(\omega) \overline{\tilde{r}(\omega)} = |\tilde{r}(\omega)|^2. \end{aligned}$$

Так как вариация есть значение автоковариационной функции при $\tau = 0$, то последнее утверждение и есть обоснование применения данного метода к оценке волатильности. Значение оценки волатильности (12) совпадает со значением оценки метода с равными весами (2), если в сумме (12) присутствуют все частоты разложения. На практике при применении методов фильтрации можно существенно улучшить оценку волатильности по сравнению с (2).

Можно обобщить этот подход на случай нестационарных временных рядов. Для непрерывного случая это означает, что автоковариация зависит от времени, следовательно, и спектр тоже получается зависящим от времени:

$$f(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} c(t, \tau) e^{-i\omega \tau} d\tau. \quad (13)$$

Зависящий от времени спектр в литературе также называется эволюционным спектром.

Недостатком традиционного преобразования Фурье является то, что для нахождения коэффициентов преобразования используется весь временной ряд, а значит, удаленные события вносят равный вклад наряду с недавними.

Альтернативой Фурье-анализу, свободной от этого недостатка является вейвлет-анализ – сравнительно новая методология, в последнее время успешно применяемая в задачах, связанных с анализом нестационарных временных рядов. В связи с этим в данной работе предлагается использовать вейвлет-разложение как альтернативу представлению (12).

Вейвлет-анализ, заключается в разложении временного ряда по базису, образованному специальным семейством функций – вейвлет. В отличие от традиционного одномерного фурье-анализа – разложения по частотам одномерный вейвлет-анализ представляет собой разложение по двум переменным – масштабу (*scale*) и времени. Аналогично тому, как в Фурье-анализе базисом является набор функций, полученных из базовой функции – синусоиды путем изменения частоты, так и семейство вейвлет образуется из некоторой базовой функции путем сдвигов (по времени) и изменений масштаба, что является удобным и естественным инструментом для работы с нестационарными временными рядами.

Сейчас поясним эту идею, а более детальное изложение теории вейвлет приведено в приложении 1, а также в работах [8, 9].

Разложение по вейвлетам в дискретном случае имеет вид

$$r_t = \sum_{j=-J}^{-1} \sum_{k=0}^{T-1} w_{jk} \psi_{jk}(t), \quad (14)$$

где ψ_{jk} - базис, образованный вейвлетами, j – индекс масштаба, k – индекс локализации.

Аналогично эволюционному фурье-спектру (13) введем понятие эволюционного вейвлет-спектра

$$S_j(t) = S_j(k) = w_{jk}^2. \quad (15)$$

Это выражение дает вклад, вносимый в общую вариацию, вейвлетом с локализацией $t=k/T$ и масштабом j . Таким образом, у нестационарного процесса вариация, зависящая от времени, является суммой по всем масштабам:

$$\text{var}(r_t) \equiv \sigma_t^2 = \sum_{j=-\infty}^{-1} S_j(t) = \sum_{j=-\infty}^{-1} w_{jk}^2. \quad (16)$$

В работах [8, 9] показано, что для стационарных процессов понятие локальной вариации совпадает с понятием обычной вариации, а также что в пределе $T \rightarrow \infty$ локальная вариация стремится к вариации обычной. Эволюционный вейвлет-спектр находится с помощью дискретного стационарного вейвлет-преобразования (см. приложение 1), алгоритм которого, удовлетворяющий нужным условиям, был разработан и приведен в работе в приложении 2.

Для наших задач в дальнейшем мы будем использовать оценку вариации $\sigma(t)$, полученную посредством вейвлет-анализа, для вычисления VaR методом вариаций-ковариаций.

1.3. Модели экстремальных событий

Нормальное распределение, как следует из центральной предельной теоремы, хорошо подходит для описания «центральной» части распределения сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. Для нахождения больших квантилей (т.е. значений VaR для значений уровня достоверности, скажем, больших 99%) применяется теория экстремальных значений в статистике (*Extreme Value Theory* – EVT) [1, 10, 11].

Математически это формулируется следующим образом. Пусть $(X_1, \dots, X_n)$ - выборка независимых одинаково распределенных случайных величин. Тогда согласно центральной предельной теореме

$$\sqrt{n} \left(\frac{(X_1 + \dots + X_n)/n - \mu}{\sigma} \right) \rightarrow N(0, 1) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Задачей теории экстремальных значений является нахождение распределения не суммы, а минимума (или максимума), т.е. такой функции $G(x)$, что

$$\mathbf{P} \left(\frac{\min\{X_1, \dots, X_n\} - b_n}{a_n} \leq x \right) \rightarrow G(x) \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

где $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ - некоторые числовые последовательности.

Согласно теории экстремальных значений функция $G(x)$ может относиться к одному из нескольких семейств распределений, среди которых чаще всего используются следующие.

Название	Функция распределения, $F(x)$
Обобщенное распределение экстремальных значений (<i>General Extreme Value distribution</i>).	$\exp \left[-\frac{1}{(1 + \gamma x)^{1/\gamma}} \right], \quad 1 + \gamma x > 0$
Распределение Парето, или степенной закон	$1 - x^{-\alpha}, \quad x > 1, \alpha > 0$
Распределение Вейбулла (Weibull).	$1 - \exp[-\lambda x^\tau], \quad x > 0, \lambda > 0, \tau > 0$

Из этих распределений только распределение Парето обладает свойством устойчивости (*stable distribution*), т.е. сумма двух случайных переменных, имеющих распределение Парето, также будет иметь это распределение. Это свойство, также присущее нормальному распределению, является крайне важным для расчета суммарного VaR портфеля. Для остальных распределений

получить оценку VaR в аналитическом виде крайне затруднительно, поэтому они используются в основном в методе Монте-Карло.

Для преодоления этих затруднений, в работе [10] предложен новый метод, сочетающий удобство метода вариаций-ковариаций с сохранением свойств «хвостов» распределений. Идея состоит в нелинейном преобразовании исходной случайной переменной в случайную переменную, имеющую нормальное распределение. Далее вычисляем значение VaR для новой переменной, используя любой из методов вариаций-ковариаций, описанных выше. Затем для вычисления распределения прибыли/убытков портфеля в исходном пространстве используются методы, применяемые в теоретической физике.

Данный подход заключается в следующем. Пусть доходности $r_i(t)$ имеют кумулятивную функцию распределения $F(r_i)$. Введем преобразование $r_i \rightarrow y_i$, преобразующее распределение $F(r)$ в стандартное нормальное распределение. Из статистики известно, что такое преобразование можно найти из следующего соотношения:

$$F(r_i) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{y_i}{\sqrt{2}} \right) \right], \quad (20)$$

где erf – функция ошибок ($\operatorname{erf}(x) = \int_0^x e^{-u^2} du$).

В явном виде преобразование (20) имеет вид

$$y_i = \sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1}(2F(r_i) - 1). \quad (21)$$

При том, что y_i имеет нормальное распределение, мы не теряем информации о характере «хвостов» распределения $F(r_i)$.

Преобразование (20) имеет место для любых распределений $F(r_i)$. Рассмотрим случай, когда $F(r_i)$ имеет вид модифицированного распределения Вейбулла:

$$P(r) = \frac{c}{2\sqrt{\pi}} |r|^{c/2-1} \exp \left(- \left| \frac{r}{r_0} \right|^c \right) \quad (22)$$

В этом случае с небольшим изменением нормировки выражение (21) упрощается до следующего:

$$y_i = \operatorname{sign}(r_i) |r_i|^{c_i/2}, \quad (23)$$

при котором вариация y_i равна $V_{ii} = (r_{0,i})^{c_i}$.

Ковариационная матрица многомерного распределения $Y = (y_1, \dots, y_n)$ имеет следующую оценку:

$$V = E[YY^T] - E[Y]E[Y^T], \quad (24)$$

и соответственно распределение имеет вид

$$P(Y) = (2\pi)^{-N/2} |V|^{-1/2} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}(Y^T - E[Y^T])V^{-1}(Y - E[Y])\right\}, \quad (25)$$

где $|V|$ - определитель матрицы V .

Чтобы получить исходное распределение $P(r)$, используем тот факт, что

$$P(R) = P(Y) \frac{dY}{dR}, \quad (26)$$

где dY/dR – якобиан преобразования $R \rightarrow Y$.

Таким образом, получаем окончательный вид

$$P(R) = |V|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(Y^T - E[Y^T])(V^{-1} - I)(Y - E[Y])\right\} \times \times \prod_{j=1}^n \frac{dF_j}{dr_j}(r_j). \quad (27)$$

Заметим, что при использовании преобразования (23) в формуле (27) вместо единичной матрицы необходимо использовать диагональную матрицу $V_{ii} = (r_{0,i})^{c_i}$.

Теперь найдем распределение доходностей портфеля, состоящего из N инструментов. Доходность портфеля представляется выражением

$$R(t) = \sum_{i=1}^N w_i r_i, \quad \sum_{i=1}^N w_i = 1. \quad (28)$$

В терминах преобразованных переменных

$$R(t) = \sum_{i=1}^N w_i \text{sign}(r_i) |r_i|^{q_i}, \quad q_i = 2 / c_i \quad (29)$$

Пропуская дальнейшие вычисления, приведем только результаты. Интересующее нас распределение доходности портфеля можно выразить посредством кумулянтов.

Кумулянты определяются следующим образом: подобно тому, как моменты μ_s являются коэффициентами разложения $M_X(t) = E[e^{tX}]$ в ряд

Тейлора, так k_s – кумулянты – являются коэффициентами разложения $\ln(M_X(t)) : \ln(M_X(t)) = \sum_{s=1}^{\infty} k_s \frac{t^s}{s!}$.

Теперь приведем полученные выражения для нескольких первых кумулянтов:

$$\begin{aligned} k_1 &= \sum_{i=1}^N w_i M_i(1), \\ k_2 &= \sum_{i=1}^N w_i^2 (M_i(2) - M_i(1)^2), \\ k_3 &= \sum_{i=1}^N w_i^3 (M_i(3) - 3M_i(1)M_i(2) + 2M_i(1)^3), \\ k_4 &= \sum_{i=1}^N w_i^4 (M_i(4) - 3M_i(2)^2 - 4M_i(1)M_i(3) + \\ &\quad + 12M_i(1)^2 M_i(2) - 6M_i(1)^4), \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$M_i(m) = \begin{cases} 2^{mq_i/2} \sigma_i^{mq_i} \Gamma\left(\frac{mq_i}{2} + \frac{1}{2}\right) & \text{при } m = 2k, k \in N; \\ 0, & m = 2k + 1. \end{cases} \quad (31)$$

Кумулянт k_2 представляет собой вариацию доходности портфеля, так что можно использовать его для получения оценки VaR. Надо заметить, что кумулянт k_4 представляет эксцесс доходности портфеля в явном виде, а так как величина эксцесса связана с вероятностями больших отклонений, то мы получаем возможность контролировать и риск экстремальных флуктуаций доходности портфеля.

1.4. Аппроксимация изменений стоимости портфеля

В рамках вариационно-ковариационного подхода можно получить аналитическое выражение для значения VaR, но лишь в тех случаях, когда

функция изменения стоимости портфеля является линейной или квадратичной относительно изменений факторов риска.

1.4.1. Линейные модели

В этом классе моделей предполагается, что $P(t, x)$ имеет производную по каждому аргументу и высшие производные равны нулю.

Обозначим через $g = \left(\frac{\partial P(t, x)}{\partial x_1}, \frac{\partial P(t, x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial P(t, x)}{\partial x_n} \right)$ градиент P ,

который представляет собой чувствительность стоимости портфеля по отношению к изменению факторов риска. Разложим $P(t, x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки (t_0, x_0) и оставим только линейные члены ряда:

$$P(t, x) = P(t_0, x_0) + P_t(t - t_0) + g^T (x - x_0),$$

откуда следует, что

$$\Delta P(\Delta t, \Delta x) = P_t \Delta t + g^T \Delta x. \quad (32)$$

Изменения стоимости портфеля будет иметь следующее распределение:

$$\Delta P \propto N(P_t \Delta t, g^T \Sigma g).$$

Доказательство этого факта следует из свойств нормального распределения при линейных преобразованиях.

Теперь найдем выражение для оценки VaR. По определению VaR

$$\mathbf{P} \left[\frac{\Delta P - P_t \Delta t}{\sqrt{g^T \Sigma g}} > \frac{VaR - P_t \Delta t}{\sqrt{g^T \Sigma g}} \right] = \alpha.$$

Таким образом, $Z(\alpha) = \frac{VaR - P_t \Delta t}{\sqrt{g^T \Sigma g}}$, где $Z(\alpha)$ - α -квантиль нормального

распределения ($Z(\alpha)=1.65$ для $\alpha=0.95$). Отсюда находим явную формулу для значения VaR:

$$VaR = P_t \Delta t + Z(\alpha) \sqrt{g^T \Sigma g}. \quad (33)$$

В случае, если портфель состоит только из линейных инструментов, можно получить следующий результат. Пусть α_i - доля инструмента i в портфеле. Тогда выражение (33) примет вид

$$VaR = \sum_i \mu_i \alpha_i + Z(\alpha) \sqrt{\alpha^T \Sigma \alpha},$$

где $\mu_i = E[r_i(\Delta t)]$ - математическое ожидание доходности i -го инструмента (как уже говорилось ранее, зачастую оно принимается равным нулю).

1.4.2. Квадратичные модели

Для нелинейных инструментов типа опционов функция $\Delta P(\Delta t, \Delta x)$ зависит от своих переменных нелинейным образом. При этом распределение $\Delta P(\Delta t, \Delta x)$ уже не будет нормальным, поэтому для нахождения процентных точек необходимо использовать другие методы, которые и излагаются ниже.

В гамма-нормальных моделях функция $\Delta P(\Delta t, \Delta x)$ аппроксимируется до второго порядка: предполагается, что $P(t, x)$ имеет вторые производные по t и x , обозначаемые P_t, P_{tt}, g, P_{tx} и H .

$$P_t \equiv \frac{\partial P}{\partial t} \text{ и } P_{tt} \equiv \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \text{скалярные величины,}$$

$$g \equiv \frac{\partial P}{\partial x}, \quad P_{tx} \equiv \frac{\partial^2 P}{\partial t \partial x} - \text{векторы, } H - \text{матрица } n \times n \text{ (гессиан): } H_{ij} \equiv \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Теперь рассмотрим методы вычисления квантилей.

Аналитический метод. Данный метод состоит в том, чтобы аппроксимировать распределение $\Delta P(\Delta t, \Delta x)$ распределением из определенного параметрического семейства (отличным от нормального), а затем по найденному распределению найти квантиль. Разложим $P(t, x)$ в ряд Тейлора до второго порядка:

$$P(t, x) = P(t_0, x_0) + P_t \Delta t + g^T \Delta x + \frac{1}{2} \{ \Delta x^T H \Delta x + 2 P_{tx} \Delta x \Delta t + P_{tt} \Delta t^2 \}. \quad (34)$$

Таким образом, $\Delta P(\Delta t, \Delta x) \equiv P(t, x) - P(t_0, x_0)$ - квадратичная функция от вектора Δx , имеющего многомерное нормальное распределение. Воспользуемся следующими результатами статистики.

Пусть $y \propto N_p(\mu, \Sigma)$, $Q(y) = y^T A y + a^T y + d$, $A^T = A$.

Тогда r -й момент распределения $Q(y)$ равен

$$E(Q(y)^r) = \left[\sum_{r_1=0}^{r-1} \binom{r-1}{r_1} g^{r-1-r_1} \sum_{r_2=0}^{r_1-1} \binom{r_1-1}{r_2} g^{r_1-1-r_2} \dots \right], \quad (35)$$

где

$$g^{(k)} = \begin{cases} \frac{1}{2} k! \sum_{j=1}^p (2\lambda_j)^{k+1} + \frac{(k+1)!}{2} \sum_{j=1}^p b_j^2 (2\lambda_j)^{k-1}, & k \geq 1; \\ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p (2\lambda_j) + (d + a^T \mu + \mu^T A \mu), & k = 0, \end{cases}$$

и

$$\begin{aligned} P^T \Sigma^{1/2} A \Sigma^{1/2} P &= \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = \Lambda, \quad PP^T = I, \\ P^T (\Sigma^{1/2} a + 2\Sigma^{1/2} A \mu) &= b = (b_1, \dots, b_p)^T. \end{aligned}$$

Для первых четырех моментов эта формула дает следующие выражения:

$$\begin{aligned} E(Q(y)) &= \mu_1 = g^{(0)}, \\ E(Q(y))^2 &= \mu_2 = \binom{1}{0} g^{(1)} \mu_0 + \binom{1}{1} g^{(0)} \mu_1, \\ E(Q(y))^3 &= \mu_3 = \binom{2}{0} g^{(2)} \mu_0 + \binom{2}{1} g^{(1)} \mu_1 + \binom{2}{2} g^{(0)} \mu_2, \\ E(Q(y))^4 &= \mu_4 = \binom{3}{0} g^{(3)} \mu_0 + \binom{3}{1} g^{(2)} \mu_1 + \binom{3}{2} g^{(1)} \mu_2 + \\ &\quad + \binom{3}{3} g^{(0)} \mu_3. \end{aligned} \quad (36)$$

Момент μ_0 принимается равным единице. В наших обозначениях

$$y \sim N(0, \Sigma), \quad A = \frac{1}{2} H, \quad a = (g + P_{tx} \Delta t), \quad d = P_t \Delta t + P_u (\Delta t)^2.$$

Для функции распределения $F_{\Delta P}$ не существует аналитического выражения, поэтому применяются различные аппроксимации, использующие разложения по более простым функциям распределения одной переменной (хи-

квадрат, специальные функции и т.д.). К примеру, разложение Корниш-Фишера (Cornish-Fisher) имеет следующее выражение:

$$F_{\Delta P}(\alpha) = \Phi(\alpha) + \frac{1}{6}(\Phi(\alpha)^2 - 1)k_3 + \frac{1}{24}(\Phi(\alpha)^3 - 3\Phi(\alpha))k_4 - \\ - \frac{1}{36}(2\Phi(\alpha)^3 - 5\Phi(\alpha))k_3^2,$$

где $\Phi(\alpha)$ – функция нормального распределения; k_3 и k_4 – кумулянты распределения $F_{\Delta P}$.

Оптимизационный метод. Используя определение VaR (1), его значение можно находить как решение оптимизационной задачи. При сделанных предположениях о квадратичной функции стоимости портфеля и нормальном распределении переменных состояния оптимизационная задача примет вид

$$\max \quad -\left[P_t \Delta t + g^T \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T H \Delta x\right]. \quad (37)$$

$$\Delta x : \Delta x^T \Sigma^{-1} \Delta x \leq k$$

Для численного решения задачи оптимизации с квадратичной целевой функцией существуют эффективные методы, например Левенберга-Маркварда. Помимо определения собственно значения VaR, решение задачи дает еще и сценарий (значения переменных состояния), при котором это значение достигается. Однако при большом числе переменных состояния данный метод применять становится невыгодным.

2. Проверка гипотез о виде распределений

Исследование временных рядов при использовании методологии VaR необходимо проводить по следующим причинам.

- При выборе типа модели для факторов риска необходимо знать вид и свойства их распределений. При анализе больших квантилей необходимо также знать характер распределений экстремальных значений.
- Выбрав модель и найдя ее параметры, необходимо проверить ее адекватность реальным данным. Это особенно важно при тестировании моделей (для нахождения источников ошибок) и при их сравнении (см. разд. 3).

Приведенные в данном разделе методы позволяют определить вид функции распределения реальных данных, определить параметры искомого распределения, а также оценить степень соответствия. Вначале дадим несколько определений.

Пусть $(X_1, \dots, X_n)$ – выборка независимых одинаково распределенных случайных величин. Обозначим порядковую статистику через $(X_1^*, \dots, X_n^*)$: $X_1^* \leq X_2^* \leq \dots \leq X_n^*$.

Пусть случайная величина X имеет функцию распределения $F(x)$. Квантиль-функция определяется как обратная функция для $F(x)$: $Q(p) := F^{-1}(x)$.

Соответственно эмпирическая квантиль-функция имеет следующий вид:

$$Q_n(p) = X_i^*, p \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right].$$

Для анализа свойств распределения реальных данных выборки удобно применять сравнительно простые графические методы, относящиеся к области непараметрической статистики и вследствие этого представляющие собой универсальное средство для проведения предварительного анализа данных.

В работе было проведено исследование статистических характеристик временных рядов для некоторых рынков. В качестве объектов исследования были взяты следующие рынки: рынок FOREX устойчивых валют (USD, DEM и пр.) в качестве примера достаточно стабильного рынка, рынок FOREX “мягких” валют (RUR, UAH, KZT) – в качестве крайне нестабильного рынка, сильно подверженного внешним воздействиям; а также рынок российских корпоративных ценных бумаг.

2.1. Графические методы

2.1.1. Квантиль-квантиль графики

Пусть $F(x, \theta)$ – некоторая параметрическая модель для функции распределения, $\hat{F} = F(x, \hat{\theta})$ – модель с оцененным параметром. Тогда квантиль-квантиль графиком (*Quantile-Quantile plot*) для выборки $(X_1, \dots, X_n)$ назовем график

$$\{(\hat{Q}(p_k), Q_n(p_k)), k = 1, \dots, n\}, \quad (38)$$

где $p_k = k/(n+1)$, $\hat{Q}$ – теоретическая квантиль-функция для функции распределения $\hat{F}$.

Идея использования квантиль-графиков состоит в следующем: если X и Y – две случайные переменные, связанные некоторым преобразованием g : $Y = g(X)$, то и квантиль-функции также связаны этим преобразованием: $Q_Y(p) = g(Q_X(p))$. В частности, если преобразование g – линейное, то квантиль-график представляет собой прямую.

Таким образом, квантиль-график позволяет ответить на вопрос о том, насколько подходит то или иное распределение для описания распределения выборки данной случайной переменной. Что важно, для этого не нужно находить параметры этого распределения. Помимо этого, с помощью данного графика можно сравнить распределения различных выборок одной и той же переменной. С помощью квантиль графика можно получить также и количественную характеристику соответствия распределений, а именно ранговую корреляцию

$$\rho_Q = \frac{\sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})(\hat{q}_k - \bar{\hat{q}})}{\sqrt{\sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n (\hat{q}_k - \bar{\hat{q}})^2}}, \quad (39)$$

где $q_k \equiv \hat{Q}(p_k)$, $\hat{q}_k \equiv Q_n(p_k)$. Значение коэффициента, большее или равное 0.999, с достоверностью 95% подтверждает гипотезу о соответствии распределений.

2.1.2. Средняя функция превышения

С помощью данного метода можно более детально распознать близость «хвостов» распределения реальных данных к тому или иному распределению.

Средняя функция превышения (*mean excess function*) определяется следующим образом:

$$e(u) = E[X - u | X > u], \quad (40)$$

а ее эмпирический аналог имеет вид

$$e_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - u)^+}{\sum_{i=1}^n I_{\{X_i > u\}}}, \quad (41)$$

где $I_A(x)$ - индикаторная функция множества A , а $y^+ := \max\{y; 0\}$.

На рис. 2 приведены виды теоретических кривых средних функций превышения для некоторых распределений. Анализируя график функции $e_n(u)$, по его виду можно делать выводы о соответствии или несоответствии реальных данных тому или иному распределению.

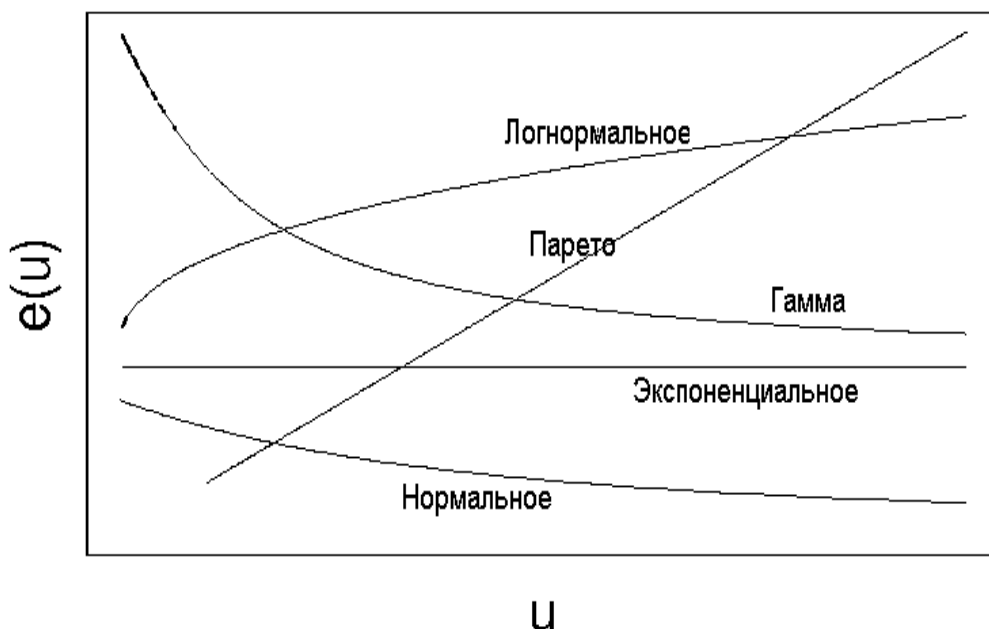


Рис. 2. Теоретический вид средней функции превышения для различных распределений

2.2. Тесты на нормальность распределения

Большинство моделей VaR используют предположение о нормальности распределений, поэтому необходимы специфические тесты на нормальность. Основными статистиками в эконометрике, указывающими на отклонение

распределения от нормального, являются асимметрия (*skewness*) и эксцесс (*kurtosis*), характеризующие асимметрию распределения и наличие «тяжелых хвостов» соответственно. На значениях выборки они вычисляются следующим образом:

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\hat{\sigma}} \right)^3, \quad (42)$$

$$\hat{\kappa} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\hat{\sigma}} \right)^4. \quad (43)$$

Для нормального распределения значение асимметрии равно нулю (как и всех нечетных моментов), а значение эксцесса равно 3. Таким образом считается, что значение эксцесса, значительно превышающее 3, указывает на наличие «тяжелых хвостов» у распределения.

2.3. Исследование рынков FOREX

Характеристики исследуемых рынков FOREX проиллюстрируем на примере исследования временных рядов DEM/USD и RUR/USD.

Результаты тестов на нормальность

	Асимметрия	Эксцесс	ρ_Q
DEM/USD	-0.1780	3.8309	0.9950
RUR/USD	1.7762	21.3974	0.7344

Для ряда DEM/USD эти результаты свидетельствуют о хорошей близости распределения к нормальному. Этот же результат дает и исследование квантиль-графика, хорошо аппроксимируемого прямой для умеренных значений квантилей (см. рис. 3). Для больших квантилей распределение лишь незначительно отличается от нормального. То, что эмпирические квантили больше теоретических для малых значений квантилей (левая часть графика) и меньше теоретических для больших (правая часть), свидетельствует о том, что на обоих «хвостах» реальное распределение «тяжелее», чем нормальное. Вид эмпирической средней функции превышения также подтверждает близость к нормальному распределению (см. рис. 4).

Для ряда же RUR/USD за период с августа 1998г. по декабрь 1999г. результаты тестов на нормальность свидетельствуют о том, что распределение далеко от нормального. Это подтверждает и исследование квантиль-графика (рис. 5), где уже для сравнительно небольших значений квантилей наблюдаются существенные отклонения. По характеру графика можно судить о наличии у распределения крайне «тяжелых хвостов». По характеру средней функции

превышения (рис. 6) можно сделать вывод о близости распределения к распределению Вейбулла. Чтобы проверить это предположение, построим квантиль-график теперь уже для распределения Вейбулла (рис. 7). Из данного графика видно, что распределение Вейбулла весьма хорошо соответствует реальному распределению для практически всех квантилей. Здесь надо заметить, что квантиль график строился только для положительных элементов выборки, так что левая часть графика – фактически центральная часть всего распределения - для анализа не используется.

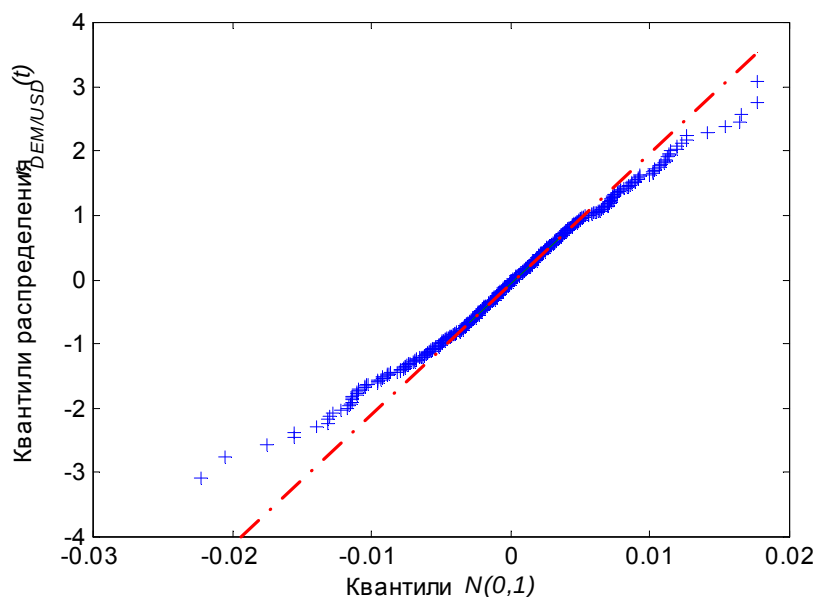


Рис. 3. Квантиль-график для DEM/USD

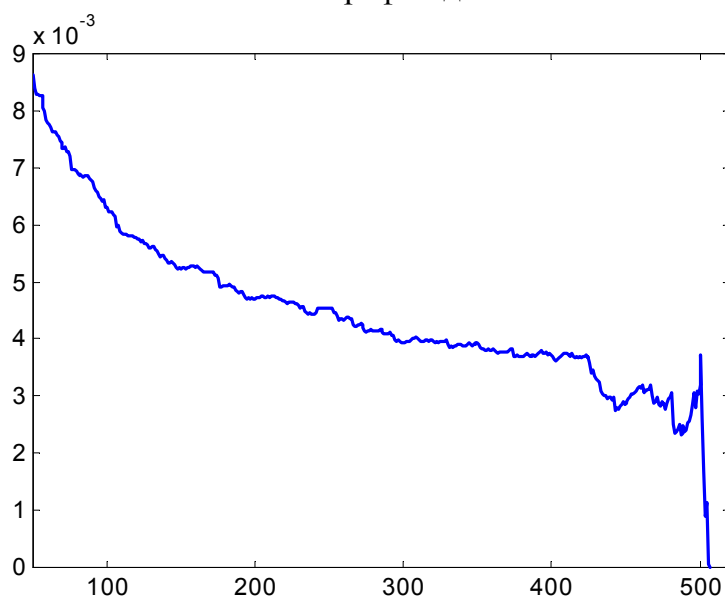


Рис. 4. Эмпирическая средняя функция превышения для ряда DEM/USD

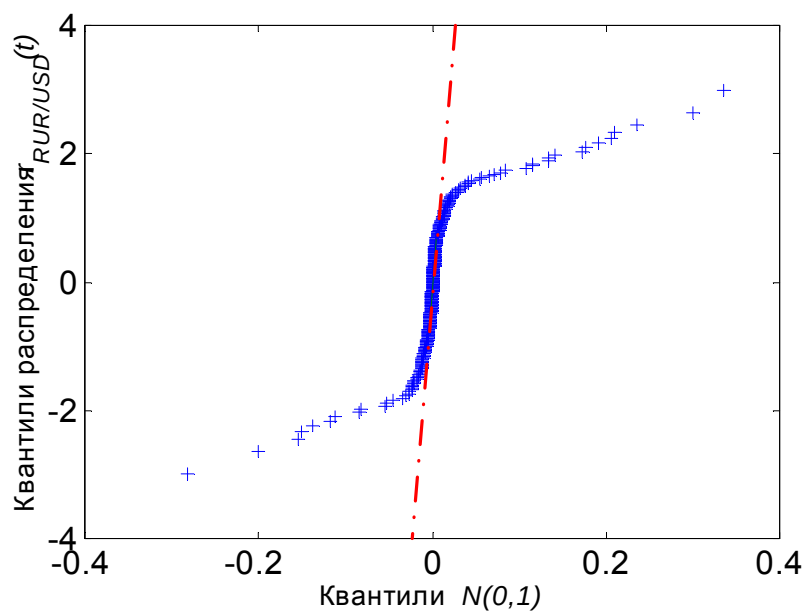


Рис. 5. Квантиль-график для нормального распределения и ряда RUR/USD

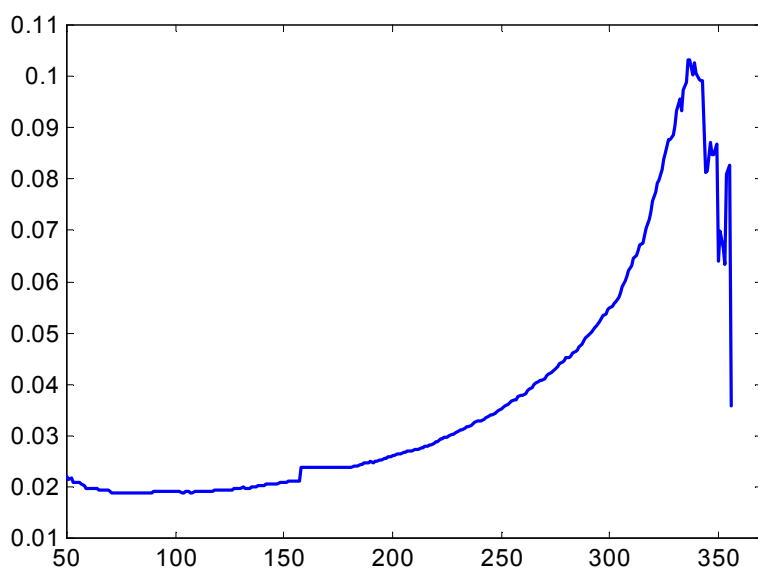


Рис. 6. Средняя функция превышения для USD/RUR

2.4. Исследование российского рынка акций

Ниже приведены результаты тестов для временных рядов котировок акций РАО ЕЭС в торговой системе РТС (EESR.RTS) за период с августа 1998г. по декабрь 1999г. Результаты тестов на нормальность: асимметрия $\gamma=0.1170$, эксцесс $\kappa=4.5030$, ранговая корреляция $\rho_Q=0.9877$.

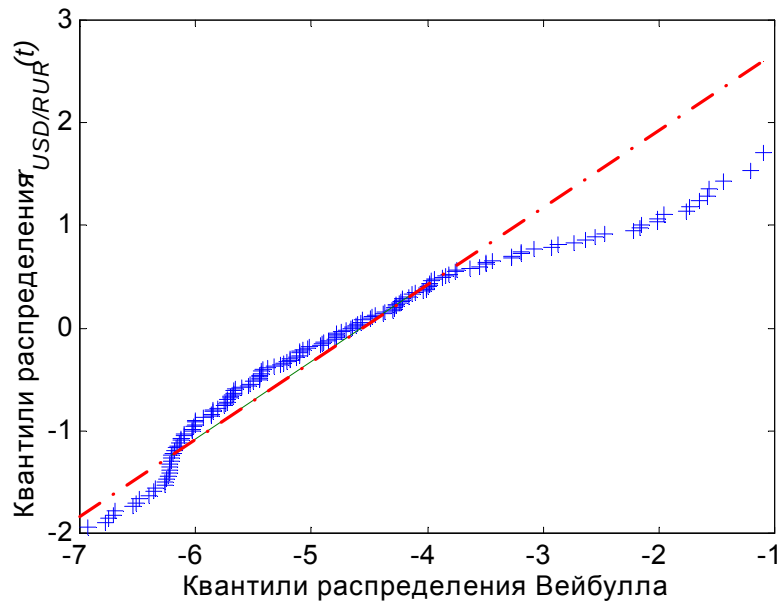


Рис. 7. Квантиль-график для распределения Вейбулла и ряда RUR/USD (в логарифмическом масштабе)

Полученные результаты свидетельствуют о наличии асимметрии распределения и «тяжелых хвостов», но не так явно выраженных, как у ряда RUR/USD. Таким образом, данный рынок занимает промежуточное положение между рынком FOREX твердых валют и мягких валют. Этот факт подтверждают графики на рис. 8-9.

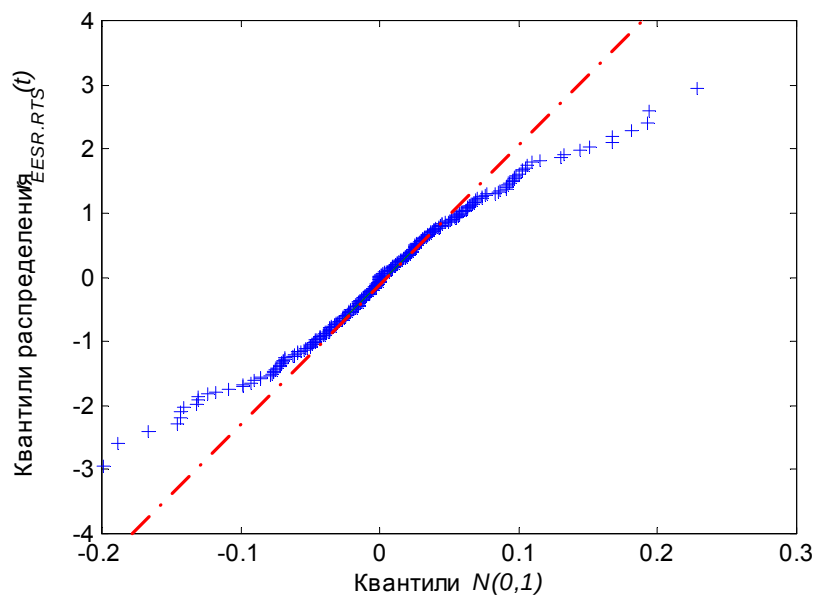


Рис. 8. Квантиль-график для акций РАО ЕЭС

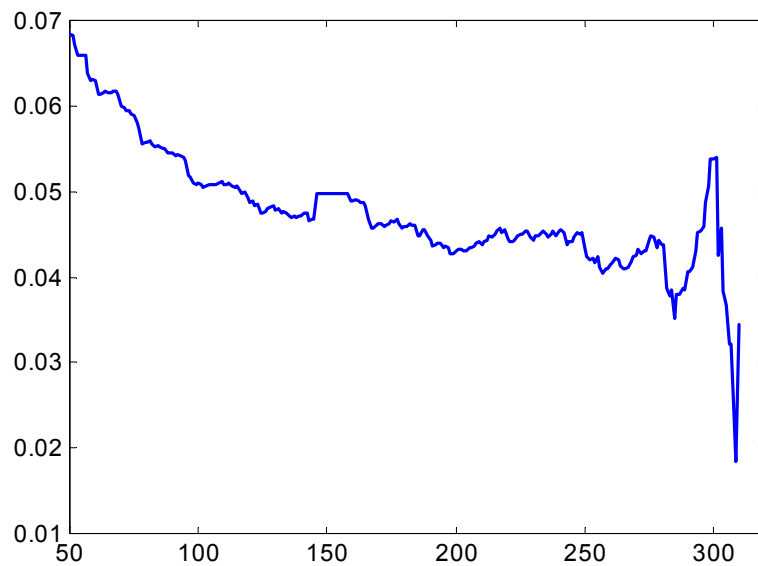


Рис. 9. Поведение эмпирической средней функции превышения для акций РАО ЕЭС

Полученные характеристики различных рынков далее будут учтены в разд. 3 при анализе применимости различных моделей вычисления VaR.

3. Тестирование моделей

Критерии оценки и сравнения различных моделей VaR можно условно разделить на две группы – точность модели и эффективность модели.

К первой группе относятся тесты на соответствие исследуемой модели вычисления VaR самому определению VaR (1). Поскольку определение дано в статистических терминах, то для проверки соответствия можно использовать различные статистические тесты. Так, например, случайный процесс, принимающий нулевое значение, если изменение стоимости портфеля не превышает значения VaR, и 1 – иначе, является процессом Бернулли, где событие 1 происходит с вероятностью α . Данную гипотезу можно проверить стандартными статистическими методами. Недостатком такого подхода является то, что для проверки гипотез требуются достаточно большие тестовые выборки, которые не всегда доступны (в особенности для развивающихся рынков), а также отсутствие наглядной интерпретации результатов. Наряду с этим простые традиционные тесты, применяемые специалистами-практиками по управлению рисками, зачастую сводятся лишь к подсчету числа случаев превышения уровня VaR (при некотором уровне достоверности α) и сравнения полученного числа с теоретически ожидаемым. Хотя такие результаты и являются наглядными, однако они не дают полной картины. По этой причине в работе приведен ряд дополнительных тестов на точность модели, предложенных в [1].

Второй группой критериев является эффективность модели. При использовании меры риска VaR для управления рисками менеджер по рискам формирует некоторую стратегию. В качестве такой стратегии в данной работе будет рассматриваться «пассивное» управление рисками, т.е. стратегия, заключающаяся в резервировании дополнительных средств для покрытия возможных потерь. Размер этих дополнительных средств, называемых рисковым капиталом (*risk capital*), и определяется величиной VaR. Эффективность такой стратегии в принципе можно оценить единым функционалом, использующим понятие функции потерь (см. ниже), однако для этого необходимо знать множество дополнительных рыночных параметров: ставки привлечения/размещения средств, наличие штрафных санкций и т.д. Поэтому в работе предложено использовать многокритериальные оценки эффективности, состоящие из дополненного набора тестов, предложенных в [1].

Несмотря на существенную разницу между этими двумя группами критериев, все тесты и на точность, и на эффективность, приводятся единообразно в рамках формализма функции потерь.

3.1. Методика тестирования моделей

Тестирование модели осуществляется путем прогонки по некоторой тестовой выборке (или несколькими выборкам) исторических или смоделированных данных. Таким образом, для тестирования по выбранному критерию необходимо выбрать набор тестовых портфелей и набор тестовых выборок из временных рядов.

Выбор портфелей для тестирования можно осуществлять следующими способами. Пусть мы имеем N инструментов. Тогда тестировать можно следующим образом:

- 1) взять N тривиальных портфелей из одного инструмента, для каждого измерить значение теста и взять среднее по всем портфелям;
- 2) взять один портфель из N инструментов с одинаковыми весами;
- 3) распределить веса инструментов в портфеле случайным образом.

Так как во всех моделях предполагается, что среднее Δr равно нулю, то на тот случай, если в тестовых выборках присутствуют тренды, сделаем процедуру симметризации, т.е. для каждого портфеля в тестовый набор включать еще и портфель с такими же по абсолютному значению весами, но с противоположными знаками (т.е. меняем длинные позиции на короткие и наоборот). При этом мы исключаем влияние трендов на значение теста.

В данной работе тестирование проводилось на различных выборках временных рядов следующих рынков:

- 1) рынок FOREX «твердых» валют: DEM/USD, GBP/USD, JPY/USD, FRF/USD, CHR/USD, ITL/USD за период с января 1997г. по декабрь 1999г. Далее этот рынок будет обозначаться FX.
- 2) рынок FOREX «мягких» валют: RUR/USD, UAH/USD и KZT/USD за период с августа 1998г. по декабрь 1999г. Данный рынок будет обозначаться FS.
- 3) рынок российских акций (EQRU). В качестве временных рядов брались котировки наиболее ликвидных акций на РТС: EESR.RTS, LKOH.RTS, MSNG.RTS, RTKM.RTS, IRGZ.RTS, NKEL.RTS) за период с августа 1998г. по декабрь 1999г.

Для каждого рынка набор портфелей формировался из элементарных портфелей, портфеля с равными весами и нескольких (5-10) портфелей со случайными весами. Далее для каждого портфеля рассчитывалось значение однодневного VaR для каждого из элементов тестовой выборки.

В тестировании участвовали следующие модели:

- 1) модель с постоянными весами (CW). Длина выборки, на которой оценивались ковариации, варьировалась в зависимости от рынка (40 на рынке FX, 30 – на EQRU);
- 2) экспоненциально-взвешенная модель (EW) с различными значениями параметра λ : $\lambda=0.97$ (EW97), как в стандарте J.P. Morgan, и $\lambda=0.90$ (EW90). Значение $\lambda=0.90$ было получено как оптимальное для российского рынка

акций (с использованием метода, описанного в разд. 1.1.2). На рынке FS разброс оптимальных значений λ для отдельных рядов был весьма велик (так, для ряда RUR/USD $\lambda=0.79$, а для ряда KZT/USD $\lambda=0.98$), поэтому для экспоненциально-взвешенной модели были взяты только значения оптимальных λ для рынков FX и EQRU;

- 3) GARCH(1,1) модель с постоянными корреляциями;
- 4) модель с постоянными корреляциями и волатильностью, определяемой посредством вейвлет-анализа (Wavelet);
- 5) модель, использующая теорию экстремальных значений (EVT).

На рис. 10. показан характерный вид графиков VaR, получаемых посредством некоторых моделей. По данному графику можно судить о качественном характере поведения приведенных моделей VaR на нестабильном рынке. Так, например, из графика видно, что экспоненциально-взвешенная модель медленно реагирует на смену кластеров волатильности, в то время как GARCH модель, напротив, слишком чувствительна к резким флуктуациям. Сглаженная вейвлет-модель ведет себя похоже на GARCH, но практически не реагирует на одиночные выбросы, хотя принципиально может иметь резкие скачки.

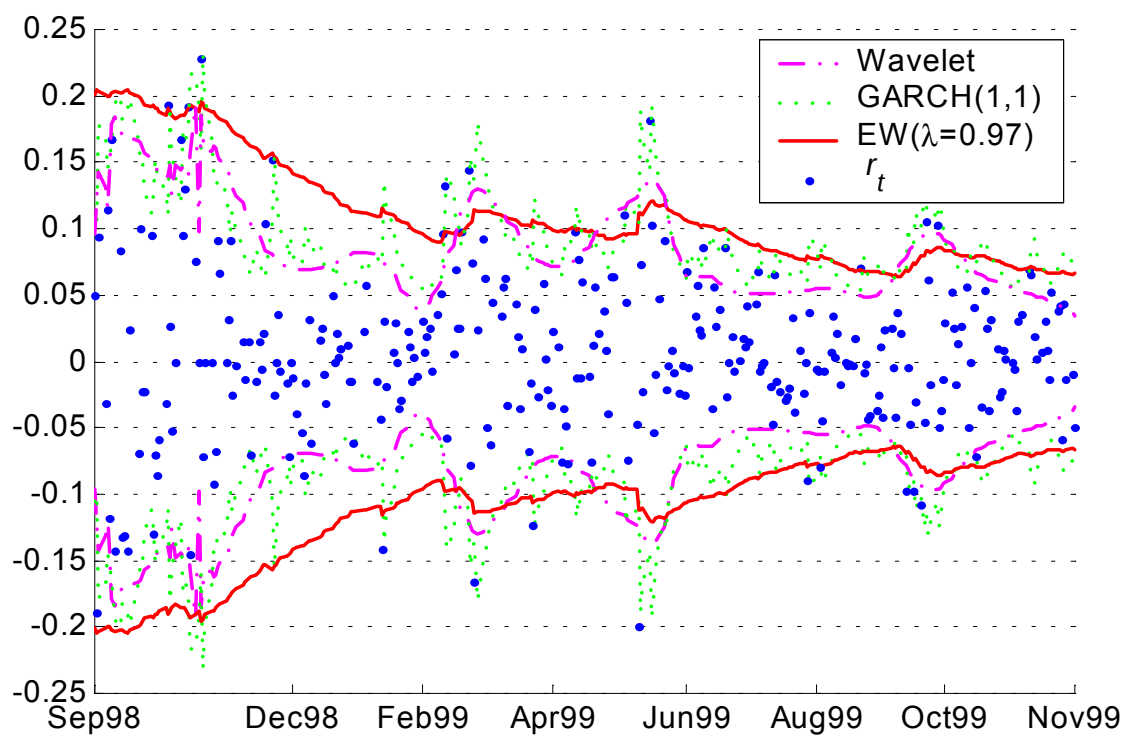


Рис. 10. График дневных доходностей портфеля на рынке EQRU и оценки VaR различных моделей для уровня достоверности 95%

3.2. Точность модели

В данном разделе приведены тесты, определяющие соответствие модели собственно статистическому определению VaR (1). Точность модели контролируется регулируемыми органами, поэтому каждая модель должна пройти тестирование на соответствие определению VaR.

3.2.1. Функция потерь

Для построения статистик используются различные варианты так называемой функции потерь (*General Loss Function*), имеющей в общем случае вид

$$L_{t+1} = \begin{cases} f(\Delta P_{t+1}, VaR_t), & \text{если } \Delta P_{t+1} < VaR_t; \\ g(\Delta P_{t+1}, VaR_t), & \text{если } \Delta P_{t+1} \geq VaR_t, \end{cases} \quad (44)$$

где ΔP_{t+1} – реализовавшееся изменение стоимости портфеля в момент $t+1$; VaR_t – оценка VaR в момент t , f и g – некоторые функции, такие что $f \geq g$. С учетом того, что мы формируем тестовые портфели с использованием симметризации, т.е. значению реализовавшейся прибыли для некоторого портфеля соответствует такое же значение убытка для портфеля с противоположными весами, будем рассматривать слегка модифицированную функцию

$$L_{t+1} = \begin{cases} f(\Delta P_{t+1}, VaR_t), & \text{если } |\Delta P_{t+1}| > VaR_t; \\ g(\Delta P_{t+1}, VaR_t), & \text{если } |\Delta P_{t+1}| \leq VaR_t. \end{cases} \quad (45)$$

Чтобы получить значение исходной статистики (44), значение статистики (45) надо будет делить на два. Далее рассмотрим частные виды функции потерь.

3.2.2. Бинарная функция потерь

Бинарная функция потерь используется для анализа числа событий, соответствующих убыткам большим, чем значение VaR (т.е. исключительных ситуаций). Математически ее можно представить как

$$L_{t+1} = \begin{cases} 1, & \text{если } |\Delta P_{t+1}| > VaR_t, \\ 0, & \text{если } |\Delta P_{t+1}| \leq VaR_t. \end{cases} \quad (46)$$

Данная функция учитывает только сами факты наличия превышения без учета величины превышения. В качестве статистики возьмем теперь среднее

значение бинарной функции потерь на тестовой выборке. При уровне достоверности α чем ближе значение статистики к $1-\alpha$, тем модель точнее.

По значениям данного теста можно проверить соответствие модели стандартному тесту, принятому BIS. Данный тест является одним из условий приемлемости модели вычисления VaR, используемой в какой-либо организации, регулирующими органами.

Согласно BIS определяются три цветовые зоны:

Зеленая зона: модель попадает в эту зону, если на протяжении 250 дней при уровне достоверности 99% было не более 4 превышений данного уровня.

Желтая зона: при тех же условиях – от 5 до 8 превышений.

Красная зона: 9 и более превышений.

Если модель попадает в зеленую зону, то ее использование для предоставления информации регулирующим органам о рисках, принимаемых организацией, разрешается. Соответственно при попадании в красную зону использование модели запрещено.

Результаты тестов приведены в табл. 2-3. Из полученных результатов можно сделать следующие выводы: на рынке FX при уровне достоверности 95% все модели имеют практически одинаковые результаты теста и хорошо соответствуют определению VaR, так как распределение доходностей для рынка FX очень близко к нормальному и можно пренебречь отклонениями от нормальности на краях распределения. При уровне достоверности 99% лучшие результаты показывает модель EVT, учитывающая отклонение распределения от нормального.

Помимо существенных отклонений от нормального распределения, рынки EQRU и FS характеризуется сильными флуктуациями и кластеризацией волатильности (периоды высокой волатильности чередуются с периодами низкой). Соответственно при уровне достоверности 95% лучшие результаты показывают те модели, которые более чувствительны к изменениям временного ряда (такие, как GARCH). При уровне достоверности 99% модель EVT, как и должно было быть согласно исследованию временных рядов, уже значительно лучше остальных. Тот факт, что почти все модели завышают риск при уровне достоверности 95%, объясняется тем, что присутствующие во временных рядах экстремальные отклонения сильно увеличивают оценку волатильности и на последующих относительно спокойных участках она остается достаточно высокой.

3.2.3. Множитель, обеспечивающий покрытие

Множитель, обеспечивающий покрытие (*Multiple to Obtain Coverage*), сочетает в себе анализ как количества превышений, так и их величины, и показывает, на сколько в среднем надо умножить значение VaR, чтобы в точности получить покрытие риска с заданным уровнем достоверности.

Математически это формулируется следующим образом: найти такой масштабирующий множитель M , что

$$F = T(1 - \alpha), \quad \text{где } F = \sum_{t=1}^T \begin{cases} 1, & \text{если } |\Delta P_{t+1}| > M \cdot VaR_t \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (47)$$

Чем ближе множитель к единице, тем модель лучше в данном аспекте.

Интерпретировать данный множитель можно следующим образом. При нахождении квантилей нормального распределения значение стандартного отклонения умножается на соответствующий множитель $Z(\alpha)$ – квантиль стандартного нормального распределения (1.65 – для 95%, 2.32 – для 99%). Таким образом, множитель, обеспечивающий покрытие, оценивает ошибку $Z(\alpha)$. Далее мы увидим роль, которую играет данный множитель в других тестах.

Из полученных результатов (см. табл. 7-8) можно сделать следующие выводы: если сравнивать значения множителя по рынкам для каждой из моделей, то выделяются модели, у которых присутствует явная тенденция к ухудшению результатов по мере усложнения рынка: они переоценивают риск при уровне достоверности 95% и недооценивают при 99% (CW, EW и в некоторой степени GARCH), а также модели с относительно стабильными характеристиками – EVT и Wavelet.

3.2.4. Соответствие распределений

Данный тест показывает, насколько соответствует распределение оценок VaR реальному распределению прибылей/убытков. Рассмотрим следующее отношение:

$$K(\alpha) = \frac{\overline{BL}(\alpha)}{1 - \alpha},$$

где $\overline{BL}(\alpha)$ – значение средней бинарной функции потерь при значении уровня достоверности $\alpha \in (\alpha_{\min}; 1)$.

В случае совпадения распределений мы должны получить функцию, тождественно равную единице. В терминах теста из разд. 3.1.1. это означает, что для каждого уровня достоверности α мы считаем отношение реальных превышений уровня VaR к теоретическому (равному $(1 - \alpha)T$, где T – длина выборки).

Если отношение больше единицы, это говорит о том, что реальное распределение «тяжелее», т.е. происходит недооценка риска. По графику функции $K(\alpha)$ можно определить интервал параметров – уровней достоверности, для которых исследуемая модель является пригодной. Ниже на рис. 11-13 приведены графики $K(\alpha)$ для всех моделей по каждому рынку. Для

удобства визуализации приводятся по два графика: для интервала уровня достоверности 80-97% и 97-99.9% (соответствующий «хвостам» распределений).

Из приведенных графиков видно следующее.

- 1) На «нормальном» рынке FX при умеренных значениях уровня достоверности (до 97%) все модели практически одинаково пригодны для использования с точки зрения точности модели. Наиболее точными являются модели EW97 (0.97 – оптимальный параметр для этого рынка), GARCH и EVT (для этого рынка распределение Вейбулла практически совпадает с нормальным). Для значений уровня достоверности, больших 97%, становится заметным отклонения от нормального распределения, как было видно из квантиль-графика.
- 2) На рынке российских акций при умеренных значениях уровня достоверности (также до 97%) наличие больших флуктуаций и выбросов приводит к завышению волатильности и, следовательно, риска. При больших значениях уровня достоверности поведение большинства моделей то же, что и на FX.
- 3) На рынке FS эти эффекты еще более выражены, и становится очевидным преимущества модели экстремальных значений.

Заметим также, что все модели, как минимум, на всех рынках попадают в «желтую зону» BIS, а наиболее консервативная – EVT – всегда в «зеленую».

3.3. Эффективность модели

Так как при «пассивном» управлении риском мера VaR используется для определения величины рискового капитала, т.е. средств, необходимых для покрытия возможных убытков, то необходимы дополнительные тесты, характеризующие модели уже не со статистической, а с экономической точки зрения. Превышение значения VaR означает, что зарезервированного рискового капитала не хватило для покрытия убытков и организации необходимо изыскивать дополнительные средства, что зачастую связано с дополнительными издержками. Среднее значение превышения как раз и характеризует величину непокрытых убытков.

С другой стороны, модель, завышающая степень риска, приводит к излишнему зарезервированному капиталу, что экономически неэффективно. Для характеристики исследуемых моделей рассмотрим следующие тесты.

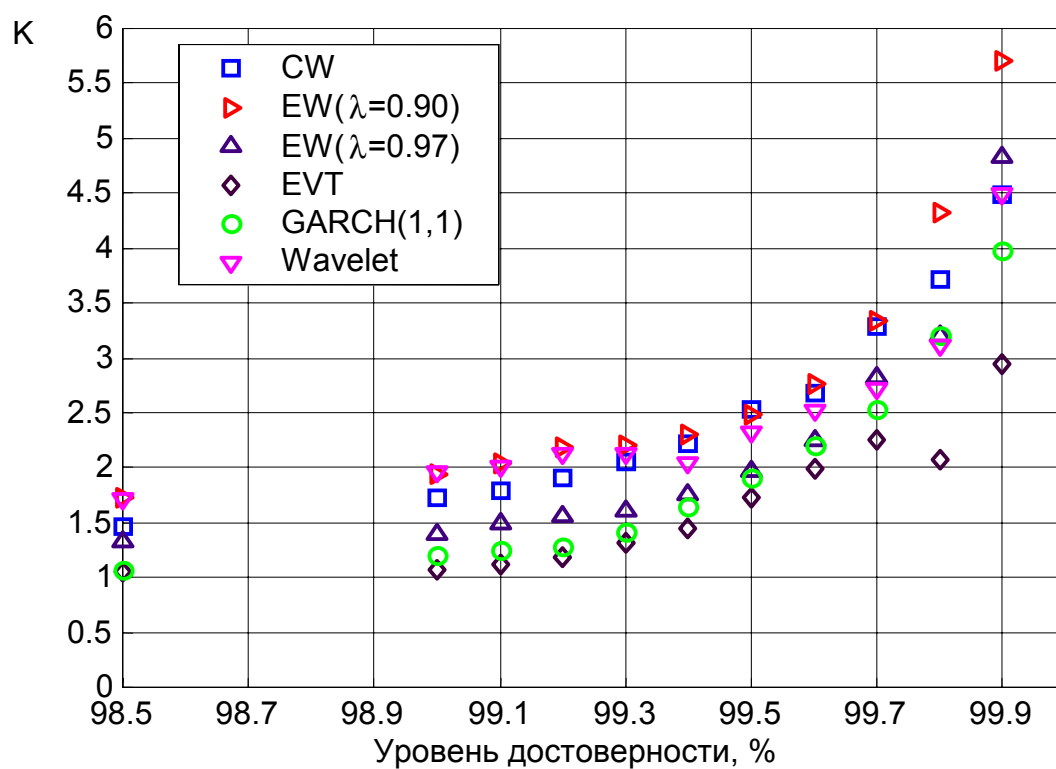
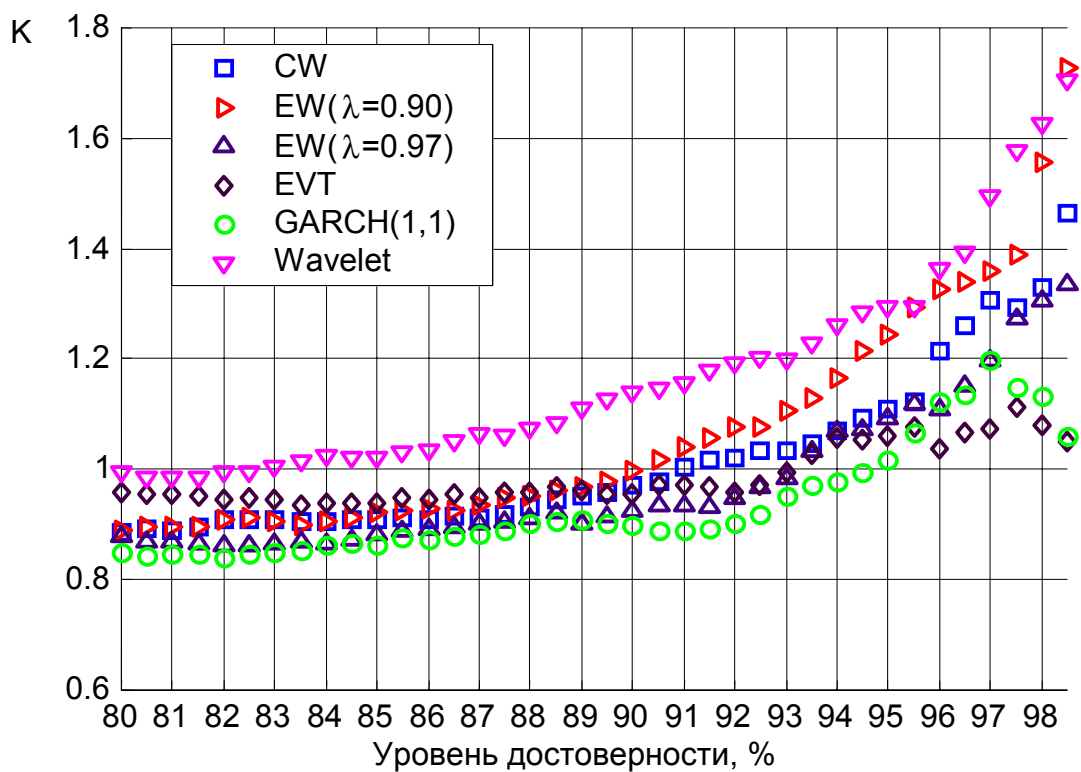


Рис. 11. Сравнение точности моделей VaR на рынке FX

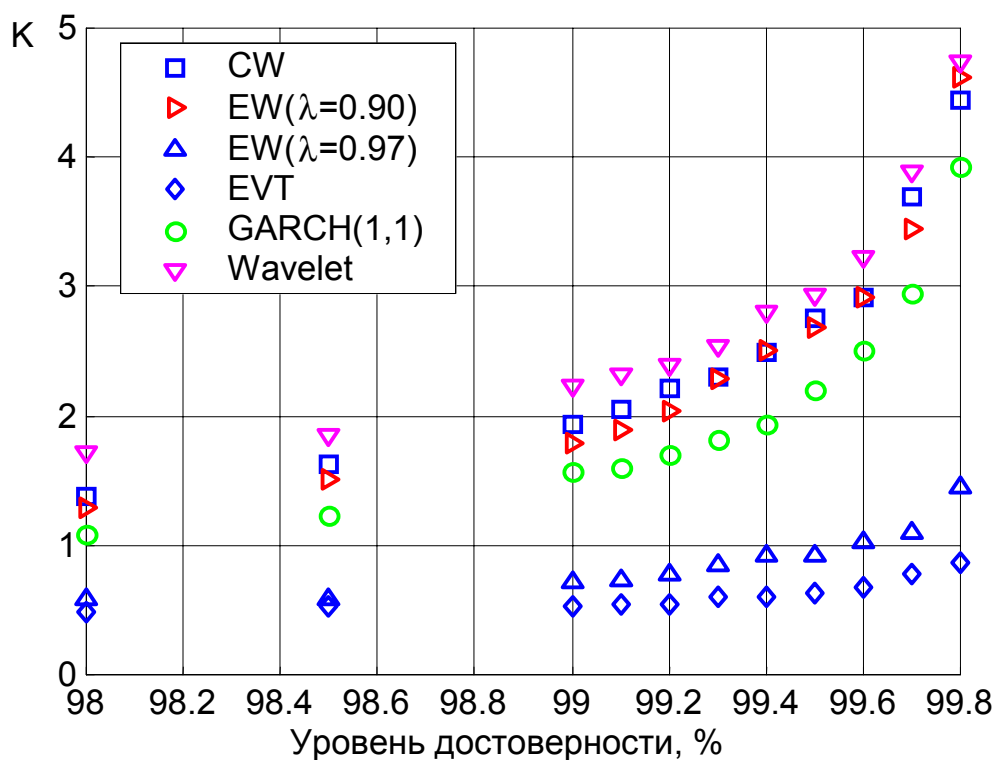
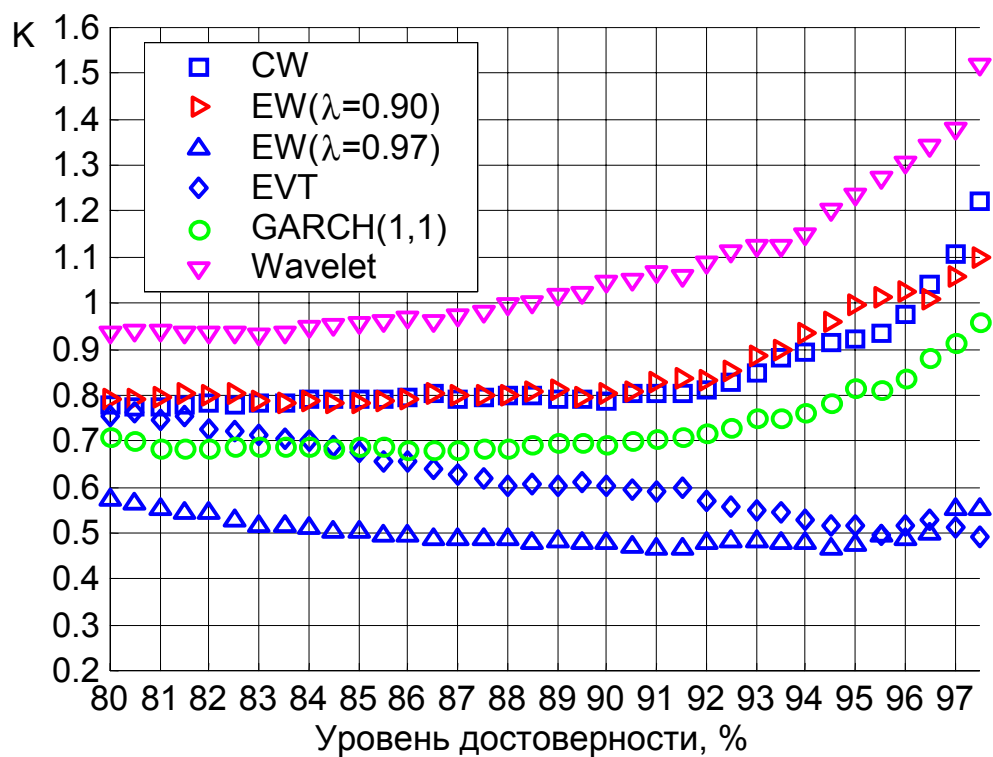


Рис. 12. Сравнение точности моделей VaR на рынке EQRU

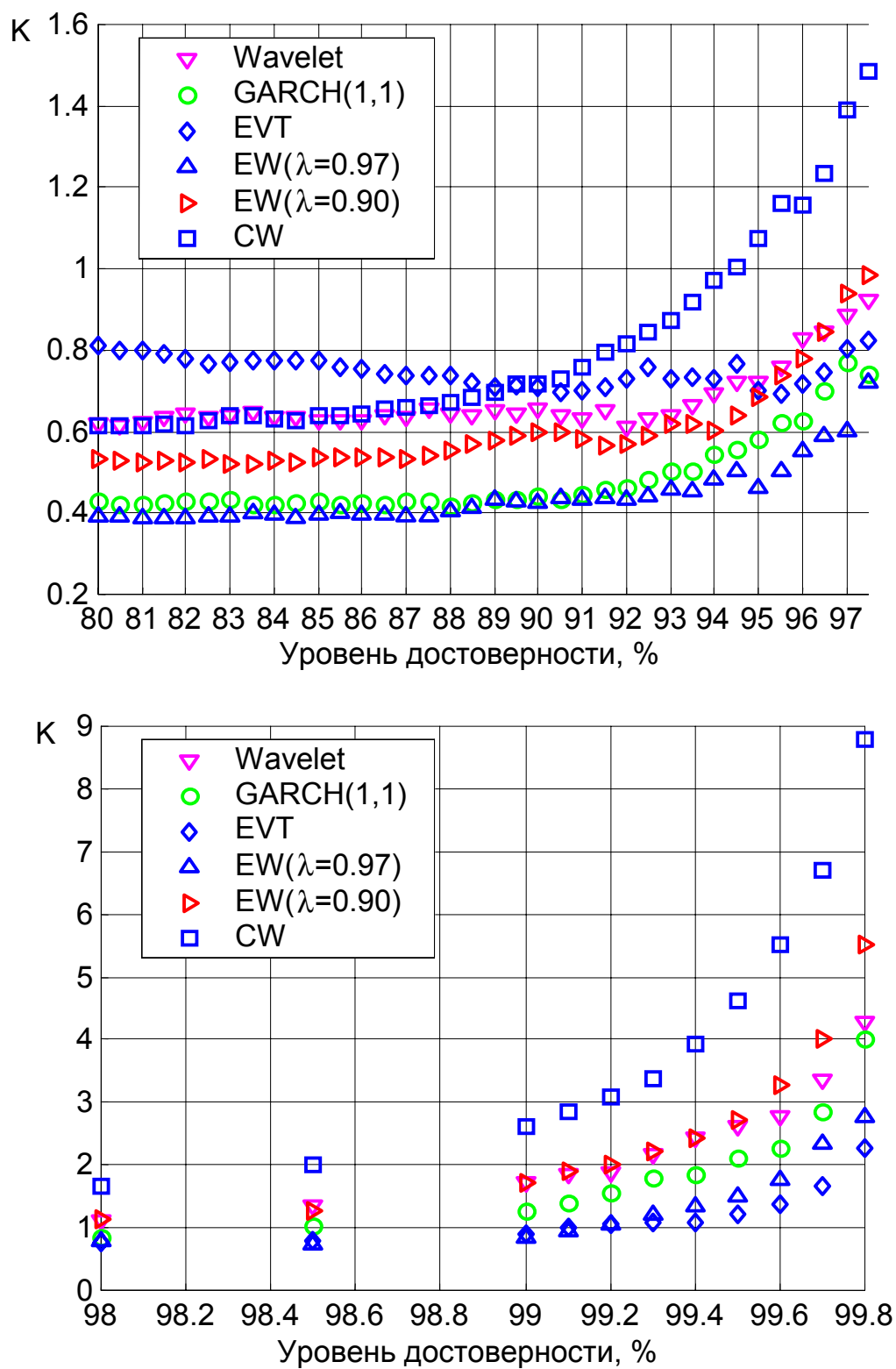


Рис. 13. Сравнение точности моделей VaR на рынке FS

3.3.1. Относительная функция потерь

Относительная функция, или средний непокрытый риск, учитывает величины превышений оценки риска:

$$L_{t+1} = \begin{cases} \frac{|\Delta P_{t+1}| - VaR_t}{VaR_t}, & \text{если } |\Delta P_{t+1}| > VaR_t \\ 0, & \text{если } |\Delta P_{t+1}| \leq VaR_t. \end{cases} \quad (49)$$

В отличие от бинарной функции потерь данная статистика анализирует только относительные величины превышений, не учитывая их частоту. Таким образом, среднее значение функции показывает, насколько в среднем в случае превышения уровня VaR мы ошибаемся. Чем меньше значение статистики у модели, тем она эффективнее в данном аспекте. Из результатов можно сделать следующие выводы.

- 1) На относительно «спокойном» рынке FX у всех моделей среднее значение приблизительно одинаково, что обусловлено хорошим согласием реальных данных и предположений модели. На рынке FS, как и должно было быть, наилучшие результаты у модели экстремальных значений. В целом по всем рынкам можно особо выделить модель Wavelet как наиболее стабильную.
- 2) При анализе результатов необходимо учитывать, что на среднее значение влияет и количество превышений. Так, для модели, имеющей большое количество малых превышений, значение этого теста может быть очень неплохим, в то время, как у другой модели, ее доминирующей, с меньшим числом превышений значение теста может быть больше. Этот недостаток можно частично устранить, умножив значение VaR на значение множителя, обеспечивающего покрытие для рассматриваемой модели, тем самым приведя все модели к «общему знаменателю».

3.3.2. Средний неиспользованный риск

Данный тест фактически является дополнительным к предыдущему тесту на средний непокрытый риск и показывает, насколько в среднем оценка VaR превышает реализовавшиеся прибыли/убытки, т.е. характеризует неиспользованный рисковый капитал. Функция потерь при этом имеет вид

$$F_{t+1} = \begin{cases} \frac{VaR_t - |\Delta P_{t+1}|}{VaR_t}, & \text{если } |\Delta P_{t+1}| > VaR_t, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (50)$$

Зарезервированный рисковый капитал не приносит дохода, поэтому желательно, чтобы значение неиспользованного рискового капитала было как

можно меньше. Этот критерий становится еще более важным для банков, так как они согласно BIS должны резервировать капитал, равный $3 \cdot VaR$. Поэтому даже небольшое улучшение эффективности по данному критерию может принести значительную выгоду. Согласно результатам теста, приведенным в табл. 6-7, по этому критерию модель Wavelet доминирует над остальными на всех рынках.

3.3.3. Многокритериальный анализ моделей

Предыдущие два теста можно проанализировать вместе, разместив на двумерной плоскости соответствующие точки (рис. 14-16). По этим графикам можно определить парето-оптимальные модели, когда считается, что модель доминирует другую, если имеет меньший непокрытый и неиспользованный риск.

В целом по всем рынкам парето-оптимальными или близкими к таковым являются модели GARCH(1,1), EVT и Wavelet, причем характеристики модели Wavelet являются наиболее стабильными по всем рынкам. Таким образом, при выборе для практического использования модели из группы оптимальных по Парето для любых внешних рыночных условиях их использование будет экономически более эффективным, чем использование остальных доминируемых моделей.

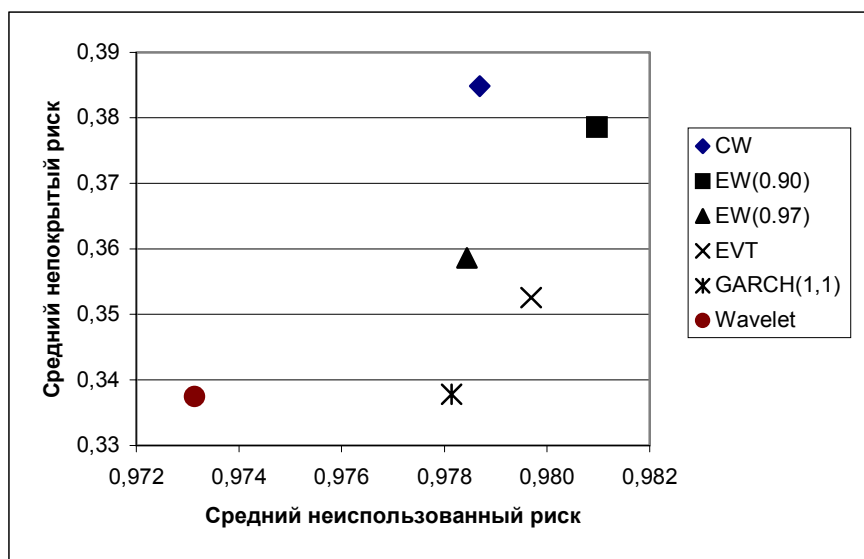


Рис. 14. График среднее превышение/средний неиспользованный риск для рынка FX и уровня достоверности 95%

3.3.4. Корреляция VaR и реальных убытков

Этот простой тест, состоящий в измерении корреляции между значением VaR и абсолютным значением изменения стоимости портфеля, показывает степень зависимости между прогнозами VaR, осуществляемыми моделью, и

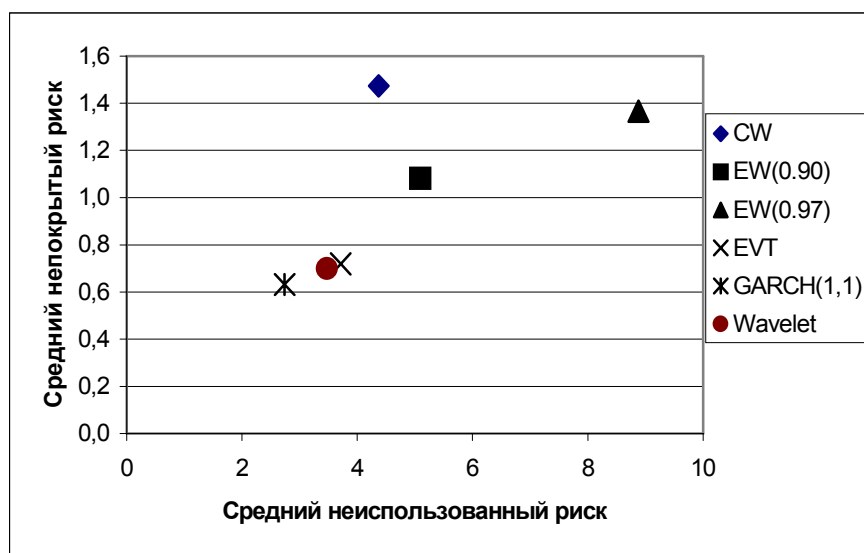


Рис. 15. График среднее превышение/средний неиспользованный риск для рынка EQRU и уровня достоверности 95%

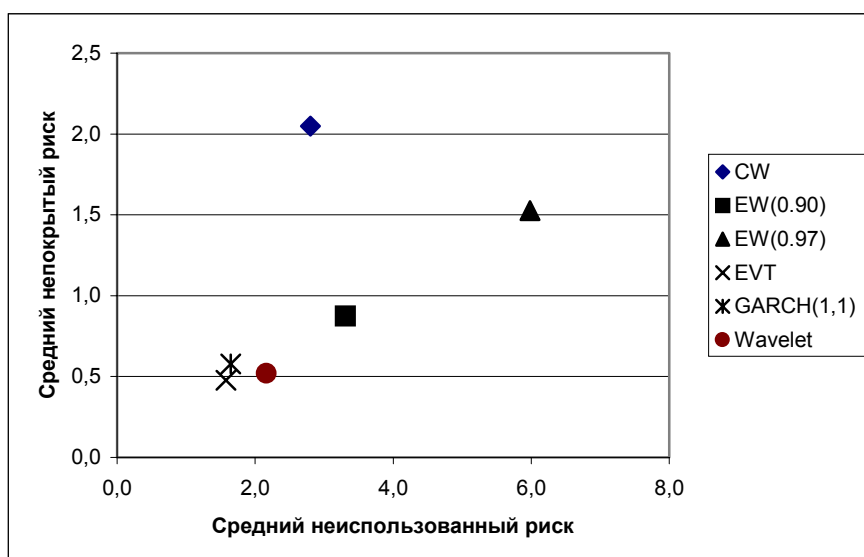


Рис. 16. График среднее превышение/средний неиспользованный риск для рынка FS и уровня достоверности 99%

реализовавшимися прибылью/убытками. Более эффективным моделям, как осуществляющим более точный прогноз, должны соответствовать большие коэффициенты корреляции.

Результаты теста приведены в табл. 10. Наибольший коэффициент корреляции имеет модели Wavelet и GARCH, из чего можно сделать вывод об их большей эффективности для прогноза изменений (уменьшения или увеличения) волатильности.

Заключение

Результаты данной работы свидетельствуют о том, что традиционные параметрические модели, используемые для вычисления меры риска VaR и широко применяемые на развитых рынках, могут оказаться непригодны для использования на развивающихся и нестабильных рынках без тонкой настройки и постоянной корректировки параметров модели. Такие выводы сделаны на основе исследования статистических свойств исторических временных рядов, а также прогонки моделей на тестовых выборках. Показано, что применение традиционных параметрических моделей не дает надежных оценок риска.

В то же время показано, что применение полупараметрических моделей: модели, использующей теорию экстремальных значений, а также предложенной в работе модели, использующей вейвлет-анализ для непараметрической оценки волатильности, - дает хорошие результаты даже на таких рынках. Более того, при многокритериальном анализе эффективности данные модели VaR также доминируют традиционные модели, в том числе и на стабильных рынках. Полученные результаты позволяют сделать вывод о применимости предложенной модели расчета VaR для портфелей, состоящих из инструментов, относящихся к разнородным рынкам: как к стабильным, так и к развивающимся.

Приложения

Приложение 1. Введение в вейвлет-анализ

Вейвлет-анализ аналогично Фурье-анализу заключается в декомпозиции исходного сигнала на элементарные составляющие, представляющие собой растяжения и сдвиги одной (или нескольких) базисной функции $\psi(t)$, называемой “материнской” (*mother wavelet*):

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-a}{b}\right), \quad t \in R, a, b \in R, a > 0.$$

Определение. Одномерным вейвлетом порядка m с компактным носителем называется функция $\psi(t)$, такая что

1. ψ имеет ограниченные производные до m включительно, определенные почти всюду на интервале (a, b) .
2. ψ равна нулю вне интервала (a, b) .
3. ψ имеет нулевые моменты до m -го включительно:

$$\int_a^b t^\alpha \psi(t) dt = 0, \alpha = \overline{0, m}.$$

4. Семейство $\{\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)\}, \quad j, k \in Z$ является ортонормированным базисом в $L_2(R)$.

Можно рассматривать вейвлеты, определенные на всей числовой оси, при этом в определении $a = -\infty$ и $b = +\infty$ и дополнительно требуется ограниченность

L_2 -нормы: $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty$.

Характерный вид одного из семейств вейвлет показан на рис. 17. Теперь определим интегральное (непрерывное) вейвлет - преобразование сигнала $f(t)$:

$$[W_\psi f](a, b) = \int f(t) \psi_{a,b}(t) dt,$$

Свойства вейвлет-преобразования:

1. Линейность: $W[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha W[f_1] + \beta W[f_2]$.
2. Инвариантность относительно сдвига: $W[f(t-b_0)] = W(a, b-b_0)$.
3. Инвариантность относительно изменения масштаба:

$$W\left[f\left(\frac{t}{a_0}\right)\right] = \frac{1}{a_0} W\left(\frac{a}{a_0}, \frac{b}{a_0}\right).$$

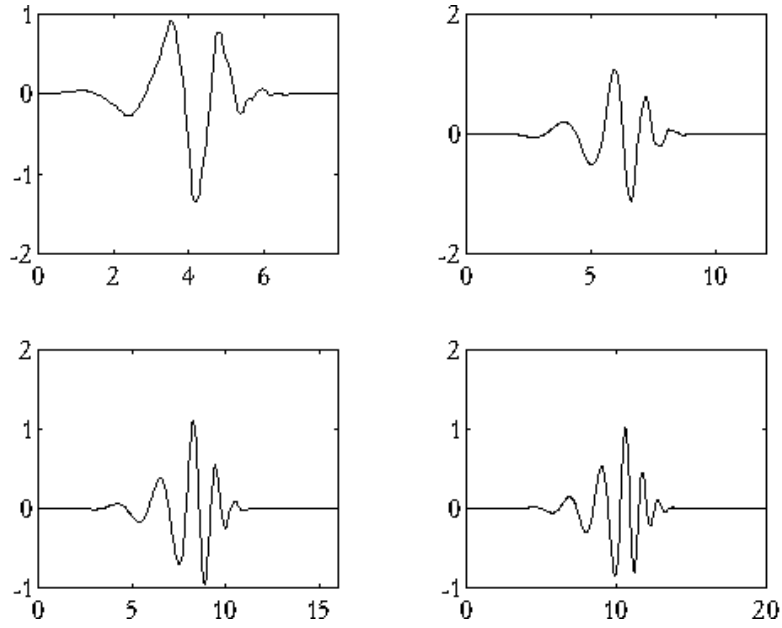


Рис. 17. Примеры вейвлет

Дискретное вейвлет-преобразование. Пусть дана последовательность (временной ряд) $\{x_i\}_{i=1}^N$, $N = 2^J$. Дискретное вейвлет-преобразование определяется в терминах фильтров H и G , а также «прореживающего» оператора D_0 , определяемых ниже. Фильтр H задается последовательностью $\{h_k\}$, а его действие на ряд $\{x_n\}$

$$(Hx)_k = \sum_n h_{n-k} x_n,$$

причем фильтр должен удовлетворять условию ортогональности

$$\sum_n h_n h_{n+2j} = 0, j \neq 0 \quad \text{и} \quad \sum_n h_n^2 = 1.$$

Фильтр G – «зеркальный» фильтр (*mirror filter*) определяется последовательностью $g_n = (-1)^n h_{1-n}$.

Действие оператора D_0 определяется как $(D_0 x)_j = x_{2j}$, т.е. выбирает только четные члены последовательности.

Определим $c_n^J \equiv x_n$, $n = 0, 1, \dots, 2^J - 1$. Для $J = J-1, \dots, 0$ рекурсивно определим

$c^j = D_0 H c^{j+1}$ – сглаженные коэффициенты на j -м уровне, а

$d^j = D_0 G c^{j+1}$ – детализированные коэффициенты на j -м уровне.

Заметим, что c^j и d^j – последовательности длины 2^j .

Так как и D_0H , и D_0G являются ортогональными преобразованиями, то обратное преобразование найти просто, если записать преобразование в матричной форме и в качестве обратного преобразования взять обратную матрицу.

Стационарное вейвлет-преобразование позволяет более полно исследовать статистические свойства исходных данных, не уменьшая числа коэффициентов разложения на каждом последующем уровне, но в то же время является переопределенным, что влечет некоторые трудности.

Определим оператор Z , вставляющий в последовательность нули:
 $Z: (Zx)_{2j} = x_j, (Zx)_{2j+1} = 0$.

Определим стационарное вейвлет-преобразование аналогично дискретному, только осуществляемое посредством операторов $H^{[r]}$ и $G^{[r]}$:

$$\begin{aligned} H^{[r]} &= Z^r h, \quad G^{[r]} = Z^r g, \\ a^J &= c^J, \\ a^{j-1} &= H^{[J-j]} a^j, \quad b^{j-1} = G^{[J-j]} a^j. \end{aligned}$$

Если вектор a^J имеет длину 2^J , то преобразование требует $O(J2^J)$ операций в отличие от $O(2^J)$ операций в случае дискретного вейвлет-преобразования. Стационарное преобразование связано с непрерывным, так как его коэффициенты можно находить как

$$d_k^j = \int \psi_j(t - 2^{-j}k) f(t) dt.$$

С помощью стационарного вейвлет-преобразования выражаются функции локальной автоковарии, и, следовательно, эволюционный вейвлет-спектр имеет вид

$$S(t) = \sum_{j=-\infty}^{-1} (d_k^j)^2.$$

Приложение 2. Алгоритм дискретного стационарного вейвлет-преобразования

Пусть $X = (x_1, \dots, x_n)$ - исходный сигнал, $G = (g_1, \dots, g_m)$ - фильтр. Как описано в приложении 1, для стационарного преобразования используется

$$\text{фильтр } G^{[r]} = \left(g_1, \underbrace{0, \dots, 0}_{2^r-1}, g_2, \dots, \underbrace{0, \dots, 0}_{2^r-1}, g_m \right).$$

Вектор Y , полученный в результате свертки X и $G^{[r]}$ имеет компоненты $y_k = \sum_{i=1}^{m_r} x_i g_{k+i-1}$ и длину $n-m_r+1$,

где $m_r = (m-1)(2^r - 1) + m$ и $r \leq J = \log_2 \left(\frac{n-1}{m-1} \right)$.

Таким образом, для того чтобы получить необходимое число коэффициентов ($k=1, \dots, n$), необходимо добавить к X еще m_r-1 значений. Причем добавить надо таким образом, чтобы сохранить l_2 – норму. Для этого выберем следующее граничное расширение:

$$\tilde{X} = (x_{n-m_r+1}, \dots, x_n, x_1, \dots, x_n).$$

В результате получаем следующий алгоритм.

0. Устанавливаем уровень $j=0$.
1. На уровне j получаем векторы $\tilde{X}$, $G^{[j]}$, $H^{[j]}$ по приведенным выше формулам.
2. Производим свертку $\tilde{X}$ с $G^{[j]}$ и $H^{[j]}$ - получаем значения коэффициентов на уровне j .
3. Увеличиваем значения уровня $j=j+1$, и если $j < J$, то переходим к шагу 1.

Приложение 3. Результаты тестов

Модель	FX		EQRU		FS	
	L	σ	L	σ	L	σ
CW	0,0555	0,0035	0,0463	0,0057	0,0533	0,0076
EW90	0,0622	0,0037	0,0499	0,0067	0,0399	0,0129
EW97	0,0546	0,0077	0,0253	0,0134	0,0331	0,0137
EVT	0,0531	0,0075	0,0492	0,0068	0,0466	0,0088
GARCH	0,0508	0,0029	0,0439	0,0105	0,0283	0,0161
Wavelet	0,0647	0,0059	0,0628	0,0048	0,0403	0,0075

Таблица 2. Среднее значение бинарной функции потерь при уровне достоверности 95%

Модель	FX		EQRU		FS	
	L	σ	L	σ	L	σ
CW	0,0173	0,0028	0,0187	0,0058	0,0269	0,0008
EW90	0,0194	0,0023	0,0177	0,0028	0,0226	0,0073
EW97	0,0140	0,0022	0,0081	0,0053	0,0168	0,0073
EVT	0,0107	0,0021	0,0127	0,0047	0,0178	0,0065
GARCH	0,0119	0,0022	0,0174	0,0040	0,0120	0,0065
Wavelet	0,0195	0,0033	0,0222	0,0051	0,0207	0,0030

Таблица 3. Среднее значение бинарной функции потерь при уровне достоверности 99%

Модель	FX		EQRU		FS	
	L	σ	L	σ	L	σ
CW	0,3849	0,0490	0,4647	0,0965	1,2259	0,8289
EW90	0,3786	0,0126	0,4367	0,1157	1,9089	1,4411
EW97	0,3586	0,0787	0,3693	0,1180	2,5155	1,9924
EVT	0,3526	0,0731	0,4427	0,1118	1,9365	1,2377
GARCH	0,3378	0,0503	0,4782	0,1454	0,9618	0,6015
Wavelet	0,3374	0,0168	0,3775	0,0474	0,9653	0,4836

Таблица 4. Среднее значение непокрытого риска при уровне достоверности 95%

Модель	FX		EQRU		FS	
	L	σ	L	σ	L	σ
CW	0,3093	0,0267	0,3560	0,1543	1,3242	1,2221
EW90	0,3047	0,0351	0,3561	0,1436	2,1183	2,1557
EW97	0,3147	0,0420	0,2946	0,2247	2,9982	2,5621
EVT	0,3288	0,0575	0,3450	0,1697	2,0399	1,6089
GARCH	0,3093	0,0847	0,3547	0,1320	0,9317	0,6179
Wavelet	0,2179	0,0438	0,2406	0,0377	0,9333	0,7231

Таблица 5. Среднее значение непокрытого риска при уровне достоверности 99%

Модель	FX		EQRU		FS	
	L	σ	L	σ	L	σ
CW	0,6350	0,0084	0,6808	0,0384	0,7346	0,0061
EW90	0,6394	0,0099	0,6792	0,0434	0,7291	0,0249
EW97	0,6389	0,0078	0,7178	0,0570	0,7768	0,0520
EVT	0,6410	0,0085	0,6815	0,0418	0,7174	0,0287
GARCH	0,6406	0,0092	0,6886	0,0519	0,7762	0,0788
Wavelet	0,6120	0,0125	0,6541	0,0433	0,7122	0,0446

Таблица 6. Среднее значение неиспользованного риска при уровне достоверности 95%

Модель	FX		EQRU		FS	
	L	σ	L	σ	L	σ
CW	0,6350	0,0084	0,6808	0,0384	0,7346	0,0061
EW90	0,6394	0,0099	0,6792	0,0434	0,7291	0,0249
EW97	0,6389	0,0078	0,7178	0,0570	0,7768	0,0520
EVT	0,6410	0,0085	0,6815	0,0418	0,7174	0,0287
GARCH	0,6406	0,0092	0,6886	0,0519	0,7762	0,0788
Wavelet	0,6120	0,0125	0,6541	0,0433	0,7122	0,0446

Таблица 7. Среднее значение неиспользованного риска при уровне достоверности 99%

Модель	FX		EQRU		FS	
	L	σ	L	σ	L	σ
CW	1,0505	0,0391	0,9563	0,0480	1,0089	0,1037
EW90	1,0793	0,0202	0,9920	0,0522	0,8918	0,1620
EW97	1,0249	0,0471	0,7634	0,1563	0,7801	0,1917
EVT	1,0142	0,0475	0,9765	0,0544	0,9770	0,1154
GARCH	1,0113	0,0337	0,9207	0,1151	0,6661	0,2698
Wavelet	1,0887	0,0454	1,0903	0,0431	0,8656	0,1046

Таблица 8. Среднее значение множителя, обеспечивающего покрытие, при уровне достоверности 95%

Модель	FX		EQRU		FS	
	L	σ	L	σ	L	σ
CW	1,1410	0,0627	1,1624	0,0805	1,5827	0,2380
EW90	1,1649	0,0528	1,1844	0,0898	1,5944	0,3178
EW97	1,0792	0,0621	0,9107	0,1868	1,3192	0,5125
EVT	1,0169	0,0817	1,0639	0,1248	1,4557	0,4487
GARCH	1,0190	0,0476	1,1521	0,1284	1,0404	0,3266
Wavelet	1,1114	0,0368	1,2084	0,0827	1,3113	0,1390

Таблица 9. Среднее значение множителя, обеспечивающего покрытие, при уровне достоверности 99%

Модель	FX		EQRU		FS	
	L	σ	L	σ	L	σ
CW	0,0737	0,0590	0,3329	0,0754	0,3312	0,2243
EW90	0,0756	0,0743	0,3564	0,0849	0,3737	0,2494
EW97	0,0890	0,0646	0,3071	0,0557	0,2613	0,1746
EVT	0,0874	0,0644	0,3547	0,0906	0,3560	0,2470
GARCH	0,0442	0,0820	0,3370	0,1258	0,4250	0,2428
Wavelet	0,2600	0,0555	0,4040	0,0813	0,4740	0,1988

Таблица 10. Среднее значение корреляции VaR и прибыли/убытков

Литература

1. Engel J., Gizycki M. Conservatism, Accuracy and Efficiency: Comparing Value-at-Risk Models. // Sydney: Reserve Bank of Australia, 1998.
2. Меньшиков И.С. Финансовый анализ ценных бумаг. Москва: Финансы и статистика, 1998.
3. Risk Metrics™ Technical Document – Fourth Edition. New York: RiskMetrics Group, 1995.
4. Dave R.D., Stahl G. On the Accuracy of VaR Estimates Based on the Variance-Covariance Approach. // Zurich: Olsen & Associates, 1996.
5. Farton W. Calculating Value-at-Risk. // Philadelphia: Wharton School, 1996.
6. Bouchaud J.P., Sornette D., Walter C., Aguilar J.P. Taming Large Events: Optimal Portfolio for Strongly Fluctuating Assets. // International Journal of Theoretical and Applied Finance. 1998. Vol.1 No.1 P. 25-41.
7. Ibragimov I.A., Has'minskii R.Z. Statistical Estimation. New York: Springer, 1981.
8. Nason G.P., von Sachs R. Wavelets in Time series Analysis // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 1999. Vol.357. No.1760. P. 2511-2526.
9. Nason G.P., Silverman B.W. The Stationary Wavelet Transform and Some Statistical Applications // Bristol: University of Bristol, 1998.
10. Sornette D., Simonetti P., Andersen J.V. Nonlinear Covariance Matrix and Portfolio Theory for non-Gaussian Multivariate Distributions. Los Angeles: University of California, 1998.
11. Embrechts P., Kluppelberg C., Mikosh T. Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Berlin: Springer, 1997.
12. Bouchaud J.P., Sornette D., Walter C., Aguilar J.P. Taming Large Events: Optimal Portfolio for Strongly Fluctuating Assets. // International Journal of Theoretical and Applied Finance. 1998. Vol.1. No.1. P. 25-41.
13. Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D. Coherent Measures of Risk. // Mathematical Finance. 1999. Vol.9. No.3. P. 203-228.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ.....	1
1. МЕРЫ РИСКА VALUE-AT-RISK.....	5
1.1. МЕТОД ВАРИАЦИЙ-КОВАРИАЦИЙ	8
1.1.1. Ковариационная матрица с равными весами	9
1.1.2. Экспоненциально-взвешенные ковариации	9
1.1.3. GARCH – модели	10
1.2. НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ.....	12
1.2.1. Историческое моделирование	12
1.2.2. Непараметрическое моделирование волатильности	14
1.3. МОДЕЛИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СОБЫТИЙ.....	17
1.4. АППРОКСИМАЦИЯ ИЗМЕНЕНИЙ СТОИМОСТИ ПОРТФЕЛЯ.....	20
1.4.1. Линейные модели.....	21
1.4.2. Квадратичные модели.....	22
2. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ О ВИДЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ	25
2.1. ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ.....	26
2.1.1. Квантиль-квантиль графики	26
2.1.2. Средняя функция превышения	26
2.2. ТЕСТЫ НА НОРМАЛЬНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ	27
2.3. ИССЛЕДОВАНИЕ РЫНКОВ FOREX	28
2.4. ИССЛЕДОВАНИЕ РОССИЙСКОГО РЫНКА АКЦИЙ	30
3. ТЕСТИРОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ.....	33
3.1. МЕТОДИКА ТЕСТИРОВАНИЯ МОДЕЛЕЙ.....	34
3.2. ТОЧНОСТЬ МОДЕЛИ.....	36
3.2.1. Функция потерь.....	36
3.2.2. Бинарная функция потерь.....	36
3.2.3. Множитель, обеспечивающий покрытие	37
3.2.4. Соответствие распределений.....	38
3.3. ЭФФЕКТИВНОСТЬ МОДЕЛИ	39
3.3.1. Относительная функция потерь	43
3.3.2. Средний неиспользованный риск	43
3.3.3. Многокритериальный анализ моделей.....	44
3.3.4. Корреляция VaR и реальных убытков	44
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	46

ПРИЛОЖЕНИЯ.....	47
Приложение 1. Введение в вейвлет-анализ	47
Приложение 2. Алгоритм дискретного стационарного вейвлет-преобразования	49
Приложение 3. Результаты тестов	50
ЛИТЕРАТУРА	53